

ARCHIV FÜR ELEKTROTECHNIK

IM EINVERNEHMEN MIT DEM VERBAND DEUTSCHER ELEKTROTECHNIKER e. V. (VDE)

HERAUSGEGEBEN VON

J. FISCHER UND W. NÜRNBERG

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

44. BAND

1959

SECHSTES HEFT

Inhaltsverzeichnis

	Seite
H. LAU: Magnetische Kopplung zwischen den Stämmen zweier Sternvierer. Mit 3 Textabbildungen . . .	331
H. WEH und M. FRISTER: Entladung einer Induktivität über veränderlichen ohmschen Widerstand. Mit 6 Textabbildungen	355
G. SENFT: Beitrag zur Berechnung der Erwärmung von Prüftransformatoren. Mit 6 Textabbildungen . .	363
H.-H. WOLFF: Über den vom magnetischen Feld eines geraden Leiters herrührenden Fluß durch eine beliebige Fläche. Mit 16 Textabbildungen	373
O. LOH: Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen (III. Teil). Mit 10 Textabbildungen . . .	386

Einführung in die theoretische Elektrotechnik

Dr.-Ing. E. h. KARL KÜPFMÜLLER

o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt

Sechste verbesserte und erweiterte Auflage

Mit 527 Abbildungen. VII, 512 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 31,50

Aus den Besprechungen der 5. Auflage:

„... Das durch die präzise, klare und übersichtliche Darstellung ausgezeichnete Buch mit einer vortrefflichen Auswahl lehrhafter und praktisch wichtiger Probleme, die vielfach mit Zahlenbeispielen behandelt werden, war bereits in den früheren Auflagen nicht nur eines der meist benutzten Lehrbücher für den Unterricht der Elektrotechniker geworden, sondern es diente auch vielen Ingenieuren der Praxis trotz des bescheidenen Titels „Einführung“ als Nachschlagewerk. Die neue erweiterte Auflage ist daher sehr willkommen.“

VDI-Zeitschrift

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Das

Archiv für Elektrotechnik

erscheint nach Maßgabe der eingehenden Arbeiten zwanglos in einzeln berechneten Heften.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für die Zeitschrift „Archiv für Elektrotechnik“ erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Archiv für Elektrotechnik“ erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Fotokopien: Aufgrund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung fotomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. (Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beiträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch und wissenschaftlicher Veröffentlichungen“ hingewiesen (Geschäftsstelle Berlin W 15, Uhlandstr. 175), ebenso auf die Normblätter DIN 1304, Allgemeine Formelzeichen, und DIN 1302, Mathematische Zeichen. Es wird gebeten, an den Anfang jeder Abhandlung eine Übersicht zu stellen, am Ende eine Zusammenfassung zu geben. Die Übersicht soll den eiligen Leser über die Einteilung (den Gedankengang), die Zusammenfassung über die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit unterrichten. Am Schluß jedes Manuskriptes ist die vollständige Anschrift des Verfassers anzugeben. Im Manuskript sind griechische Buchstaben rot, Frakturbuchstaben blau, geradstehende Buchstaben gelb zu unterstreichen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung, notfalls auch die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Von jeder Arbeit werden zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich geliefert.

Manuskripte sind zu senden:

Für die Gebiete: Grundlagen, Theorie, Meßtechnik, Schwachstromtechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER, (17a) Karlsruhe i. Baden, Schirmerstraße 6.

Für die Gebiete: Starkstromtechnik, Energieübertragung, Hochspannungstechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. WERNER NÜRNBERG, (1) Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität.

Manuskripte, die bei dem unterzeichneten Verlag in Berlin oder Heidelberg eingehen, wird dieser sofort dem zuständigen Herausgeber übermitteln.

SPRINGER-VERLAG

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberg

Heidelberger Platz 3, Fernspr.: Sammel-Nr. 830301.

Neuenheimer Landstraße 28—30, Fernspr. 27901—4

Landolt-Börnstein Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik

Sechste Auflage · Unter vorbereitender Mitwirkung von J. D'ANS, A. EUCKEN †, G. JOOS, W. A. ROTH † · Herausgegeben von J. BARTELS, P. TEN BRUGGENCATE, H. HAUSEN, K. H. HELLWEGE, KL. SCHÄFER, E. SCHMIDT · In vier Bänden

Vor kurzem erschien:

Zweiter Band: **Eigenschaften der Materie in ihren Aggregatzuständen.**

In 9 Teilen

Sechster Teil: Elektrische Eigenschaften I

Bearbeitet von zahlreichen Fachgelehrten. Herausgegeben von K. H. HELLWEGE und A. M. HELLWEGE · Mit 1777 Abbildungen. XVI, 1018 Seiten 4°. 1959. In Moleskin gebunden DM 448,—

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Magnetische Kopplung zwischen den Stämmen zweier Sternvierer

Von

HERMANN LAU

Mitteilung aus der Entwicklungsabteilung der Hackethal Draht- und Kabelwerke A. G. Hannover

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 13. Januar 1959)

Übersicht. Die Natur der magnetischen Kopplungen in Fernsprechkabeln ist durch die Arbeiten von DALZELL [1], SCHILLER [2], SIEBER und SCHLUMP [3] geklärt worden. Für die Konstruktion eines kopplungsarmen Kabels reichen jedoch die Ergebnisse dieser Arbeiten noch nicht aus, da sie über die Größe der Kopplungen keine Aussage machen. BREMICKER [4] hat in seiner leider nicht im Druck erschienenen Dissertation einen Weg gezeigt, der die Berechnung der Größe aller drallabhängigen unmittelbaren¹ systematischen Kopplungen zuläßt. In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse auf einem einfacheren Weg abgeleitet.

Die Gegeninduktivität zwischen zwei in sich geschlossenen Stromkreisen berechnet sich aus

$$M = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_{\vec{w}_I} \int_{\vec{w}_{II}} \left(\frac{d\sigma_I \cdot d\sigma_{II}}{t} \cos \Theta \right)$$

μ_0 = Induktionskonstante, μ_r = relative Permeabilität, w_I und w_{II} = betrachtete Stromwege, $d\sigma_I$ und $d\sigma_{II}$ = Streckenelemente dieser Wege, t = Abstand der Streckenelemente, Θ = Winkel, den die Richtungen der Streckenelemente miteinander einschließen.

Der Stromweg w_I wird von den Adern 1a und 1b (also einem der beiden Stämme) des Vierers in der Innenlage des Fernsprechkabels gebildet. Der Strom hat in den beiden Adern entgegengesetzte Richtung. Der Stromweg w_{II} wird von den Adern 2a und 2b eines Stammes des Vierers in der Außenlage des Kabels gebildet, die ebenfalls entgegengesetzt vom Strom durchflossen werden (s. Bild 1).

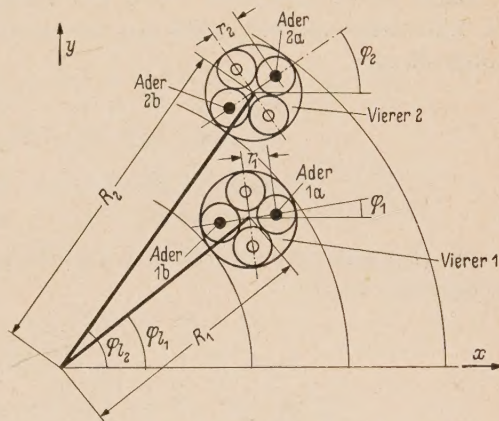


Bild 1. Querschnittsbild eines Kabels mit den koppelnden Stromkreisen.

Die z-Achse fällt mit der Kabelachse zusammen. Das Querschnittsbild liegt in der x-y-Ebene. Es bedeuten

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{d_1} \cdot z_I + \varphi_{10} = \text{Drallwinkel im Vierer 1,}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{d_2} \cdot z_{II} + \varphi_{20} = \text{Drallwinkel im Vierer 2,}$$

$$\varphi_{l_1} = \frac{2\pi}{d_{L_1}} \cdot z_I + \varphi_{l_{10}} = \text{Drallwinkel in der Innenlage,}$$

$$\varphi_{l_2} = \frac{2\pi}{d_{L_2}} \cdot z_{II} + \varphi_{l_{20}} = \text{Drallwinkel in der Außenlage,}$$

¹ Außer den unmittelbaren Kopplungen können auch mittelbare Kopplungen über sogenannte „dritte Kreise“ von großer praktischer Bedeutung sein (vgl. die Arbeiten von W. KLEIN [5]).

$\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{l_{10}}, \varphi_{l_{20}}$ = Anfangswinkel in der Ebene $z = 0$.

d_1, d_2 = Viererschlaglänge des Vierers 1 bzw. 2,

d_{L_1}, d_{L_2} = Schlaglänge der Innenlage bzw. Außenlage,

z_I = Höhe des betrachteten Querschnitts im Vierer 1 über der Ebene $z = 0$,

z_{II} = Höhe des betrachteten Querschnitts im Vierer 2 über der Ebene $z = 0$,

R_1 = mittlerer Lagenhalbmesser der Innenlage,

R_2 = mittlerer Lagenhalbmesser der Außenlage,

r_1 = halber Mittenabstand der beiden Adern eines Stammes (bzw. eines Paares) im Vierer 1,

r_2 = halber Mittenabstand der beiden Adern eines Stammes (bzw. eines Paares) im Vierer 2.

Um die Lage der einzelnen Größen in der Ebene senkrecht zur Kabelachse festzulegen, benutzen wir die komplexe Schreibweise. Es ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &= R_1 \cdot e^{j\varphi_{l_1}}, \\ \mathfrak{R}_2 &= R_2 \cdot e^{j\varphi_{l_2}}, \\ \mathfrak{r}_1 &= r_1 \cdot e^{j\varphi_1}, \\ \mathfrak{r}_2 &= r_2 \cdot e^{j\varphi_2}, \\ \mathfrak{Z}_{01a} &= R_1 \cdot e^{j\varphi_{l_1}} + r_1 \cdot e^{j\varphi_1} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{r}_1, \\ \mathfrak{Z}_{01b} &= R_1 \cdot e^{j\varphi_{l_1}} - r_1 \cdot e^{j\varphi_1} = \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{r}_1, \\ \mathfrak{Z}_{02a} &= R_2 \cdot e^{j\varphi_{l_2}} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{r}_2, \\ \mathfrak{Z}_{02b} &= R_2 \cdot e^{j\varphi_{l_2}} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{r}_2.\end{aligned}$$

Dabei ist vorausgesetzt — was nur annähernd stimmt —, daß bei einem Schnitt senkrecht zur Kabelachse die Schnittflächen der einzelnen Vierer und Adern Kreisflächen sind. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned}x_{1a} &= \operatorname{Re}(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{r}_1), & y_{1a} &= \operatorname{Im}(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{r}_1), & z_{1a} &= z_I, \\ x_{1b} &= \operatorname{Re}(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{r}_1), & y_{1b} &= \operatorname{Im}(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{r}_1), & z_{1b} &= z_I, \\ x_{2a} &= \operatorname{Re}(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{r}_2), & y_{2a} &= \operatorname{Im}(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{r}_2), & z_{2a} &= z_{II}, \\ x_{2b} &= \operatorname{Re}(\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{r}_2), & y_{2b} &= \operatorname{Im}(\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{r}_2), & z_{2b} &= z_{II}.\end{aligned}$$

Die Gegeninduktivität läßt sich nach Zerlegung der beiden Stromkreise in Hin- und Rückweg ausdrücken durch:

$$\begin{aligned}M &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{\cos \Theta_{1a2a}}{t_{1a2a}} d\sigma_{1a} d\sigma_{2a} - \int_0^l \int_0^l \frac{\cos \Theta_{1a2b}}{t_{1a2b}} d\sigma_{1a} d\sigma_{2b} \\ &\quad - \int_0^l \int_0^l \frac{\cos \Theta_{1b2a}}{t_{1b2a}} d\sigma_{1b} d\sigma_{2a} + \int_0^l \int_0^l \frac{\cos \Theta_{1b2b}}{t_{1b2b}} d\sigma_{1b} d\sigma_{2b}.\end{aligned}$$

Dabei ist:

l = Kabellänge

$$\cos \Theta_{1a2a} = \frac{\frac{dx_{1a}}{dz_I} \cdot \frac{dx_{2a}}{dz_{II}} + \frac{dy_{1a}}{dz_I} \cdot \frac{dy_{2a}}{dz_{II}} + \frac{dz_{1a}}{dz_I} \cdot \frac{dz_{2a}}{dz_{II}}}{\frac{d\sigma_{1a}}{dz_I} \cdot \frac{d\sigma_{2a}}{dz_{II}}}$$

$$\frac{dx_{1a}}{dz_I} = \frac{d}{dz_I} \operatorname{Re}(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{r}_1) = \frac{d}{dz_I} \operatorname{Re}(R_1 \cdot e^{j\varphi_{l_1}} + r_1 \cdot e^{j\varphi_1})$$

$$= \frac{d}{dz_I} \operatorname{Re}\left(R_1 \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{dL_1} \cdot z_I + \varphi_{l_{10}}\right)} + r_1 \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{d_1} \cdot z_I + \varphi_{10}\right)}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(j \frac{R_1}{dL_1} \cdot 2\pi e^{j\left(\frac{2\pi}{dL_1} \cdot z_I + \varphi_{l_{10}}\right)} + j \frac{r_1}{d_1} \cdot 2\pi \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{d_1} \cdot z_I + \varphi_{10}\right)}\right)$$

Bezeichnen wir die Steigungswinkel der Lagen mit ξ_{L_1} und ξ_{L_2} , die der Vierer mit ξ_{r_1} und ξ_{r_2} , also

$$\operatorname{tg} \xi_{L_1} = \frac{R_1}{d_{L_1}} \cdot 2\pi, \quad \operatorname{tg} \xi_{L_2} = \frac{R_2}{d_{L_2}} \cdot 2\pi,$$

$$\operatorname{tg} \xi_{r_1} = \frac{r_1}{d_1} \cdot 2\pi, \quad \operatorname{tg} \xi_{r_2} = \frac{r_2}{d_2} \cdot 2\pi,$$

so wird:

$$\frac{dx_{1a}}{dz_I} = -\operatorname{Im} (\operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot e^{j\varphi_{L_1}} + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot e^{j\varphi_{r_1}})$$

und entsprechend:

$$\frac{dy_{1a}}{dz_I} = \operatorname{Re} (\operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot e^{j\varphi_{L_1}} + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot e^{j\varphi_{r_1}})$$

$$\frac{dx_{2a}}{dz_I} = -\operatorname{Im} (\operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot e^{j\varphi_{L_2}} + \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot e^{j\varphi_{r_2}}) \text{ usw.}$$

Weiter ist:

$$\frac{dz_{1a}}{dz_I} = 1, \quad \frac{dz_{2a}}{dz_{II}} = 1, \quad \frac{dz_{1a}}{dz_I} \cdot \frac{dz_{2a}}{dz_{II}} = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1a}}{dz_I} \cdot \frac{dx_{2a}}{dz_{II}} + \frac{dy_{1a}}{dz_I} \cdot \frac{dy_{2a}}{dz_{II}} &= \operatorname{Im} (\operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot e^{j\varphi_{L_1}} + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot e^{j\varphi_{r_1}}) \cdot \operatorname{Im} (\operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot e^{j\varphi_{L_2}} + \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot e^{j\varphi_{r_2}}) \\ &\quad + \operatorname{Re} (\operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot e^{j\varphi_{L_1}} + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot e^{j\varphi_{r_1}}) \cdot \operatorname{Re} (\operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot e^{j\varphi_{L_2}} + \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot e^{j\varphi_{r_2}}) \\ &= \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{L_2}) + \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cos (\varphi_{L_2} - \varphi_{r_1}) \\ &\quad + \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{r_2}) + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \Theta_{1a2a} &= [\operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{L_2}) + \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cos (\varphi_{L_2} - \varphi_{r_1}) \\ &\quad + \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{r_2}) + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2}) + 1] \frac{dz_I}{d\sigma_{1a}} \frac{dz_{II}}{d\sigma_{2a}}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_0^l \int_0^l \left\{ \frac{1 + \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{L_2}) + \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cos (\varphi_{L_2} - \varphi_{r_1})}{t_{1a2a}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{r_2}) + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2})}{t_{1a2a}} \right\} dz_I dz_{II} \\ &\quad - \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_0^l \int_0^l \left\{ \frac{1 + \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{L_2}) + \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cos (\varphi_{L_2} - \varphi_{r_1})}{t_{1a2b}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{r_2}) - \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2})}{t_{1a2b}} \right\} dz_I dz_{II} \\ &\quad - \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_0^l \int_0^l \left\{ \frac{1 + \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{L_2}) - \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cos (\varphi_{L_2} - \varphi_{r_1})}{t_{1b2a}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{r_2}) - \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2})}{t_{1b2a}} \right\} dz_I dz_{II} \\ &\quad - \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_0^l \int_0^l \left\{ \frac{1 + \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{L_2}) - \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cos (\varphi_{L_2} - \varphi_{r_1})}{t_{1b2b}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{L_1} - \varphi_{r_2}) + \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cos (\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2})}{t_{1b2b}} \right\} dz_I dz_{II}. \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung gleichartiger Glieder können wir die Integrale folgendermaßen umordnen:

$$\begin{aligned}
 M = & \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{1}{t_{1a2a}} - \frac{1}{t_{1a2b}} - \frac{1}{t_{1b2a}} + \frac{1}{t_{1b2b}} \right] dz_I dz_{II} \\
 & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{1}{t_{1a2a}} - \frac{1}{t_{1a2b}} - \frac{1}{t_{1b2a}} + \frac{1}{t_{1b2b}} \right] \cos(\varphi_{l_1} - \varphi_{l_2}) dz_I dz_{II} \\
 & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{1}{t_{1a2a}} - \frac{1}{t_{1a2b}} + \frac{1}{t_{1b2a}} - \frac{1}{t_{1b2b}} \right] \cos(\varphi_{l_2} - \varphi_{r_1}) dz_I dz_{II} \\
 & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{1}{t_{1a2a}} + \frac{1}{t_{1a2b}} - \frac{1}{t_{1b2a}} - \frac{1}{t_{1b2b}} \right] \cos(\varphi_{l_1} - \varphi_{r_2}) dz_I dz_{II} \\
 & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{1}{t_{1a2a}} + \frac{1}{t_{1a2b}} + \frac{1}{t_{1b2a}} + \frac{1}{t_{1b2b}} \right] \cos(\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2}) dz_I dz_{II}
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$M = M_a + M_b + M_c + M_d + M_e.$$

Wir führen die Berechnung der fünf Teilintegrale nacheinander getrennt durch. Außer der unabhängigen Veränderlichen z_I benutzen wir als zweite unabhängige Veränderliche weiterhin nicht mehr z_{II} sondern:

$$u = z_{II} - z_I.$$

Damit wird unter Verwendung der vereinfachten Schreibweise

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Z}_{02a} - \mathfrak{Z}_{01a} &= \mathfrak{Z}_{1a2a} \\
 t_{1a2a} &= \sqrt{u^2 + |\mathfrak{Z}_{1a2a}|^2} \\
 t_{1a2b} &= \sqrt{u^2 + |\mathfrak{Z}_{1a2b}|^2} \\
 t_{1b2a} &= \sqrt{u^2 + |\mathfrak{Z}_{1b2a}|^2} \\
 t_{1b2b} &= \sqrt{u^2 + |\mathfrak{Z}_{1b2b}|^2}.
 \end{aligned}$$

Um die Integrale

$$\int \frac{du}{t_{1a2a}}, \quad \int \frac{du}{t_{1a2b}} \quad \text{usw.}$$

zu berechnen, erweist es sich nach einem Vorschlag von BARANOW [6] als zweckmäßig, die Wurzeln in Reihen zu entwickeln. Die Form $u \sqrt{1 + \dots}$ gibt für große Werte von u eine sehr gut konvergierende Reihe. Sie versagt aber für kleine Werte von u , für die der Beitrag zum Integral gerade besonders groß ist. Es ist notwendig, noch eine weitere von u unabhängige Größe s_0 mit vorzuziehen, also die Reihenentwicklung in der Form

$$\sqrt{u^2 + s_0^2} \cdot \sqrt{1 + \dots}$$

durchzuführen. Wir wählen s_0 gleich dem Abstand der Mittelachsen beider betrachteter Vierer in der Ebene $u = 0$ bzw. $z_I = z_{II}$.

Also ist:

$$\begin{aligned}
 s_0 &= |\mathfrak{z}_0| = |\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1|_{(u=0)} \\
 &= \left| R_2 \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{dL_2} \cdot z_I + \varphi_{l_{20}}\right)} - R_1 \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{dL_1} \cdot z_I + \varphi_{l_{10}}\right)} \right|.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Setzen wir weiter:

$$\begin{aligned}
 Q_{1a2a} &= |\mathfrak{Z}_{1a2a}|^2 - s_0^2, \\
 Q_{1a2b} &= |\mathfrak{Z}_{1a2b}|^2 - s_0^2 \quad \text{usw.},
 \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} t_{1a2a} &= \sqrt{u^2 + s_0^2 + Q_{1a2a}} \\ \frac{1}{t_{1a2a}} &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + s_0^2 + Q_{1a2a}}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + s_0^2} \sqrt{1 + \frac{Q_{1a2a}}{u^2 + s_0^2}}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{u^2 + s_0^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{Q_{1a2a}}{u^2 + s_0^2} + \frac{3}{8} \frac{Q_{1a2a}^2}{(u^2 + s_0^2)^2} - \frac{5}{16} \frac{Q_{1a2a}^3}{(u^2 + s_0^2)^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + s_0^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_{1a2a}}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^3}} + \frac{3}{8} \frac{Q_{1a2a}^2}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^5}} - \frac{5}{16} \frac{Q_{1a2a}^3}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^7}} + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + s_0^2}} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} \end{aligned}$$

Entsprechend wird:

$$\frac{1}{t_{1a2b}} = \frac{1}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)}} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2b}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} \quad \text{usw.}$$

Bei der Bildung des Integranden der Teilintegrale M_a , M_b , M_c und M_d (s. S. 334) fällt der vor der Summe stehende Wurzelwert fort. Nur im Teilintegral M_e bleibt er stehen und wird mit $4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ multipliziert.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial z_I} &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \int_{-z_I}^{l-z_I} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m - Q_{1a2b}^m - Q_{1b2a}^m + Q_{1b2b}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du, \\ \frac{\partial M_b}{\partial z_I} &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \int_{-z_I}^{l-z_I} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m - Q_{1a2b}^m - Q_{1b2a}^m + Q_{1b2b}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} \cos(\varphi_{l_1} - \varphi_{l_2}) du, \\ \frac{\partial M_c}{\partial z_I} &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \int_{-z_I}^{l-z_I} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m - Q_{1a2b}^m + Q_{1b2a}^m - Q_{1b2b}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} \cos(\varphi_{l_2} - \varphi_{r_1}) du, \\ \frac{\partial M_d}{\partial z_I} &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \int_{-z_I}^{l-z_I} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m + Q_{1a2b}^m - Q_{1b2a}^m - Q_{1b2b}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} \cos(\varphi_{l_1} - \varphi_{r_2}) du, \\ \frac{\partial M_e}{\partial z_I} &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \left\{ \int_{-z_I}^{l-z_I} \frac{4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{u^2 + s_0^2}} du \right. \\ &\quad \left. + \int_{-z_I}^{l-z_I} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m + Q_{1a2b}^m + Q_{1b2a}^m + Q_{1b2b}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) du \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Alle Integranden enthalten im Zähler Winkelfunktionen, deren Argumente von z_I und z_{II} abhängen. Auch die Potenzen von Q_{1a2a} , Q_{1a2b} usw. lassen sich durch solche Winkelfunktionen ausdrücken, deren allgemeine Form

$$\cos(a z_I + b z_{II} + c)$$

lautet. Nun ist

$$\begin{aligned} \cos(a z_I + b z_{II} + c) &= \cos(a z_I + b z_I + b u + c) \\ &= \cos(a z_I + b z_I + c) \cdot \cos(b u) \\ &\quad - \sin(a z_I + b z_I + c) \cdot \sin(b u), \end{aligned}$$

so daß wir Integrale von der Form

$$\int_{-z_I}^{l-z_I} \frac{\cos(a z_I + b z_{II} + c)}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du = \cos(a z_I + b z_I + c) \int_{-z_I}^{l-z_I} \frac{\cos(b u)}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du \\ - \sin(a z_I + b z_I + c) \int_{-z_I}^{l-z_I} \frac{\sin(b u)}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du$$

bekommen. Den Hauptanteil am Integral liefert die Umgebung von $u = 0$. Diese Umgebung liegt immer im Integrationsbereich mit Ausnahme der Grenzwerte von z_I (z_I nahe 0 und z_I nahe l). Wir begehen daher keinen großen Fehler, wenn wir den Integrationsbereich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Dafür läßt sich die Lösung des Integrals anschreiben¹:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(b u) du}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} = j^{m+1} \pi \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(m - \frac{1}{2}\right)!} \left(\frac{b}{s_0}\right)^m H_m^1(j s_0 b), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(b u) du}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} = 0.$$

Für die HANKELSche Funktion erster Art können wir, da in der Regel $s_0 \cdot b \ll 1$ ist, folgende Näherungsgleichungen benutzen:

$$j \pi H_0^1(j s_0 b) \approx 2 \ln \left| \frac{2}{\gamma_e \cdot s_0 \cdot b} \right|$$

γ_e = EULERSche Konstante und

$$j^{m+1} \cdot \pi \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(m - \frac{1}{2}\right)!} \left(\frac{b}{s_0}\right)^m H_m^1(j s_0 b) \approx \left(\frac{1}{s_0}\right)^{2m} \frac{(-1)^m}{m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{m}$$

nur gültig für $m \geq 1$ und $s_0 \cdot b \ll 1$. Damit wird:

$$\int_{-z_I}^{l-z_I} \frac{\cos(a z_I + b z_{II} + c)}{\sqrt{u^2 + s_0^2}} du \approx \cos(a z_I + b z_I + c) \cdot 2 \ln \left| \frac{2}{\gamma_e \cdot s_0 \cdot b} \right|$$

für $s_0 \cdot b \ll 1$ und

$$\int_{-z_I}^{l-z_I} \frac{\cos(a z_I + b z_{II} + c)}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du \approx \cos(a z_I + b z_I + c) \cdot \left(\frac{1}{s_0}\right)^{2m} \frac{(-1)^m}{m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{m}$$

für $m \geq 1$ und $s_0 \cdot b \ll 1$.

Wir sehen, daß nach der Integration über u die Abhängigkeit von z_{II} in den Argumenten der Cosinusfunktionen überall durch die Abhängigkeit von z_I ersetzt ist. Die Argumente der Winkelfunktionen, die ursprünglich von z_{II} abhängig waren, bei denen nach der Integration jedoch z_I durch z_I ersetzt wurde, werden wir durch einen Strich über dem Zeichen kenntlich machen.

Z. B.

$$\varphi_{I_1} = \frac{2\pi}{d_L} \cdot z_{II} + \varphi_{I_{20}},$$

$$\overline{\varphi}_{I_1} = \frac{2\pi}{d_L} \cdot z_I + \varphi_{I_{20}},$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{d_2} \cdot z_{II} + \varphi_{20},$$

$$\overline{\varphi}_2 = \frac{2\pi}{d_2} \cdot z_I + \varphi_{20}.$$

¹ Siehe z. B. WATSON: Bessel Functions, S. 172 u. 332.

Entsprechend werden wir mit den davon abhängigen Größen verfahren:

$$\begin{aligned} \text{z. B.} \quad Q_{1a2a} &= |\mathfrak{B}_{1a2a}|^2 - s_0^2, \\ \bar{Q}_{1a2a} &= |\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}|^2 - s_0^2, \\ \mathfrak{B}_{1a2a} &= \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{r}_1, \\ \bar{\mathfrak{B}}_{1a2a} &= \bar{\mathfrak{R}}_2 + \bar{\mathfrak{r}}_2 - \bar{\mathfrak{R}}_1 - \bar{\mathfrak{r}}_1, \\ \mathfrak{R}_2 &= R_2 \cdot e^{j\varphi_{12}}, \\ \mathfrak{r}_2 &= r_2 \cdot e^{j\varphi_2}. \end{aligned}$$

Um die Lösung für die Integrale (3) zu erhalten, behandeln wir das Teilintegral

$$\int_{-z_I}^{l-z_I} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du.$$

Dafür können wir näherungsweise setzen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2a}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du &\approx \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \bar{Q}_{1a2a}^m \cdot \left(\frac{1}{s_0}\right)^{2m} \frac{(-1)^m}{m \binom{-1/2}{m}} \\ &\approx \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{-\bar{Q}_{1a2a}^m}{s_0^2} \right)^m \\ &\approx -\ln \left(1 + \frac{\bar{Q}_{1a2a}^m}{s_0^2} \right) \\ &\approx -\ln \frac{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}|^2}{s_0^2} \\ &\approx -2 \ln \frac{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}|}{s_0}. \end{aligned}$$

Entsprechend wird:

$$\int_{-z_I}^{l-z_I} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \frac{Q_{1a2b}^m}{\sqrt{(u^2 + s_0^2)^{2m+1}}} du \approx -2 \ln \frac{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2b}|}{s_0}$$

usw.

Damit ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial z_I} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 2 \cdot \ln \frac{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}|}{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2b}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2a}|}, \\ \frac{\partial M_b}{\partial z_I} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot 2 \cos(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2}) \ln \frac{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}|}{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2b}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2a}|}, \\ \frac{\partial M_c}{\partial z_I} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot 2 \cos(\bar{\varphi}_{l_2} - \varphi_1) \ln \frac{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}|}{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2b}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2a}|}, \\ \frac{\partial M_d}{\partial z_I} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 2 \cos(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_2) \ln \frac{|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1a2b}|}{|\bar{\mathfrak{B}}_{1b2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}|}, \\ \frac{\partial M_e}{\partial z_I} &\approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 2 \cos(\varphi_1 - \bar{\varphi}_2) \\ &\quad \times \left\{ 4 \ln \frac{2}{\gamma_e \cdot s_0 \cdot |d_2|} - \ln [|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1a2b}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}|] + 4 \ln |\mathfrak{s}_0| \right\} \\ &\approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 2 \cos(\varphi_1 - \bar{\varphi}_2) \\ &\quad \times \left\{ 4 \ln \frac{|d_2|}{\gamma_e \cdot \pi} - \ln [|\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1a2b}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2a}| |\bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}|] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Berechnung des Teilintegrals $\frac{\partial M_a}{\partial z_1}$

Die Ableitung wird bedeutend vereinfacht, wenn man — nach einem Vorschlag meiner mathematischen Mitarbeiterin ELISABETH THIELMANN — im Argument des natürlichen Logarithmus nicht mit dem Betrag der komplexen Größe sondern mit der komplexen Größe selbst rechnet und zum Betrag erst am Schluß der Rechnung übergeht gemäß der Beziehung

$$\ln |\mathfrak{Z}| = \operatorname{Re} \ln \mathfrak{Z}.$$

Dementsprechend können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial z_1} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \ln \frac{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2a}} \\ \frac{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2a}} &= \frac{(\bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1 + \bar{r}_2 - r_1)(\bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1 - \bar{r}_2 + r_1)}{(\bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1 - \bar{r}_2 - r_1)(\bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1 + \bar{r}_2 + r_1)}. \end{aligned}$$

Nun ist (s. Gl. 2)

$$\bar{s}_0 = \bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1 = \bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1 = s_0 \cdot e^{j\eta}.$$

($u=0$)

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{r_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1} = \frac{r_1}{\bar{s}_0} = a \quad \text{und} \quad \frac{\bar{r}_2}{\bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1} = \frac{\bar{r}_2}{\bar{s}_0} = b,$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2a}} &= \frac{(1+b-a)(1-b+a)}{(1-b-a)(1+b+a)}, \\ \ln \left(\frac{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2a}} \right) &= \ln(1-a^2+2ab-b^2) \\ &\quad - \ln(1-a^2-2ab-b^2). \end{aligned}$$

Da $|a| < 1$ und $|b| < 1$ sind, können wir näherungsweise schreiben:

$$\begin{aligned} \ln(\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2b}) &\approx -(a-b)^2 - \frac{1}{2}(a-b)^4 - \frac{1}{3}(a-b)^6 - \dots, \\ \ln(\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2a}) &\approx -(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a+b)^4 - \frac{1}{3}(a+b)^6 - \dots, \\ \ln \frac{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2a}} &\approx 2 \left[\binom{2}{1} a \cdot b + \frac{1}{2} \binom{4}{1} a^3 b + \frac{1}{2} \binom{4}{3} a b^3 + \frac{1}{3} \binom{6}{1} a^5 b + \frac{1}{3} \binom{6}{3} a^3 b^3 + \frac{1}{3} \binom{6}{5} a b^5 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \binom{8}{1} a^7 b + \frac{1}{4} \binom{8}{3} a^5 b^3 + \dots \right] \\ \ln \frac{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{Z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_{1b2a}} &\approx 2 \left[\binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{\bar{s}_0^2} e^{j(\varphi_1 + \bar{\varphi}_2)} + \frac{1}{2} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{\bar{s}_0^4} e^{j(3\varphi_1 + \bar{\varphi}_2)} + \frac{1}{2} \binom{4}{3} \frac{r_1 r_2^3}{\bar{s}_0^4} e^{j(\varphi_1 + 3\bar{\varphi}_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \binom{6}{1} \frac{r_1^5 r_2}{\bar{s}_0^6} e^{j(5\varphi_1 + \bar{\varphi}_2)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Für die Kopplung zwischen 2 Vierern in der gleichen Lage eines Kabels ist \bar{s}_0 eine Konstante; bei der Kopplung zwischen 2 Vierern in verschiedenen Lagen ist die Abhängigkeit des \bar{s}_0 von z_1 jedoch zu berücksichtigen. Sie erschwert es, die obige Gleichung nach z_1 zu integrieren. Wir kommen zu einer günstigeren Form der Gl. (5), wenn wir $1/\bar{s}_0$ in eine Reihe entwickeln. Nach Voraussetzung war bei 2 verschiedenen Lagen $|\mathfrak{R}_2| > |\mathfrak{R}_1|$.

Damit wird

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_0 &= \bar{\mathfrak{R}}_2 - \mathfrak{R}_1 = \bar{\mathfrak{R}}_2 \left[1 - \frac{\mathfrak{R}_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} \right], \\ \frac{1}{\bar{\varepsilon}_0} &= \frac{1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} \left[1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} + \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} \right)^3 + \dots \right], \\ \left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^m &= \left(\frac{1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} \right)^m \left[1 + \binom{m}{1} \frac{\mathfrak{R}_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} + \binom{m+1}{2} \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} \right)^2 + \binom{m+2}{3} \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\bar{\mathfrak{R}}_2} \right)^3 + \dots \right] \\ &= \left(\frac{1}{R_2} \right)^m \cdot e^{-j m \bar{\varphi}_{l_2}} \left[1 + \binom{m}{1} \frac{R_1}{R_2} e^{j (\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2})} + \binom{m+1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cdot e^{j (2 \varphi_{l_1} - 2 \bar{\varphi}_{l_2})} \right. \\ &\quad \left. + \binom{m+2}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 e^{j (3 \varphi_{l_1} - 3 \bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] \\ \ln \frac{\bar{\mathfrak{R}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{R}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{R}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{R}}_{1b2a}} &\approx 2 \left\{ \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{R_2^2} e^{j (\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 - 2 \bar{\varphi}_{l_2})} \left[1 + \binom{2}{1} \frac{R_1}{R_2} e^{j (\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2})} + \binom{3}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{j (2 \varphi_{l_1} - 2 \bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{R_2^4} e^{j (3 \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 - 4 \bar{\varphi}_{l_2})} + \binom{4}{3} \frac{r_1 r_2^3}{R_2^4} e^{j (\varphi_1 + 3 \bar{\varphi}_2 - 4 \bar{\varphi}_{l_2})} \right] \left[1 + \binom{4}{1} \frac{R_1}{R_2} e^{j (\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2})} \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{5}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cdot e^{j (2 \varphi_{l_1} - 2 \bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] + \frac{1}{3} \left[\dots \right] \left[\dots \right] + \dots \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_a}{\partial z_I} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \ln \frac{\bar{\mathfrak{R}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{R}}_{1b2b}}{\bar{\mathfrak{R}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{R}}_{1b2a}} \\ &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 4 \left\{ \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \cos (\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 - 2 \bar{\varphi}_{l_2}) + \binom{2}{1} \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2 R_1}{R_2^3} \cos (\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 3 \bar{\varphi}_{l_2}) \right. \\ &\quad + \binom{2}{1} \binom{3}{2} \frac{r_1 r_2 R_1^2}{R_2^4} \cos (\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 + 2 \varphi_{l_1} - 4 \bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{0} \frac{r_1^3 r_2}{R_2^4} \cos (3 \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 - 4 \bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{2} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2 R_1}{R_2^5} \cos (3 \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 5 \bar{\varphi}_{l_2}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \binom{4}{1} \binom{5}{2} \frac{r_1^3 r_2 R_1^2}{R_2^6} \cos (3 \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 + 2 \varphi_{l_1} - 6 \bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} \binom{4}{3} \binom{3}{0} \frac{r_1 r_2^3}{R_2^4} \cos (\varphi_1 + 3 \bar{\varphi}_2 - 4 \bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{1} \frac{r_1 r_2^3 R_1}{R_2^5} \cos (\varphi_1 + 3 \bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 5 \bar{\varphi}_{l_2}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \binom{4}{3} \binom{5}{2} \frac{r_1 r_2^3 R_1^2}{R_2^6} \cos (\varphi_1 + 3 \bar{\varphi}_2 + 2 \varphi_{l_1} - 6 \bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Alle Argumente in den Cosinus-Funktionen lassen sich durch die auf die Lage bezogenen sogenannten „wirksamen“ Drallwinkel

$$\alpha = \varphi_1 - \varphi_{l_1} \quad \beta = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_{l_2}$$

und den Kreuzungsdrallwinkel $\varepsilon = \bar{\varphi}_{l_2} - \varphi_{l_1}$ ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial M_a}{\partial z_I} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} 4 \left\{ \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (\alpha + \beta - [\nu+1] \varepsilon) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (3 \alpha + \beta - [\nu+3] \varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{2} \binom{4}{3} \frac{r_1 r_2^3}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (\alpha + 3 \beta - [\nu+1] \varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{3} \binom{6}{1} \frac{r_1^5 r_2}{R_2^6} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+5}{5} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (5 \alpha + \beta - [\nu+5] \varepsilon) \\ &\quad \left. + \dots \right\}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Berechnung des Teilintegrals $\frac{\partial M_b}{\partial z_I}$

Da

$$\frac{\partial M_b}{\partial z_I} = \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cos(\bar{\varphi}_{l_1} - \varphi_{l_1}) \cdot \frac{\partial M_a}{\partial z_I}$$

ist, können wir schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_b}{\partial z_I} &\approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 4 \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_2} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\nu} [\cos(\alpha + \beta - [\nu+2]\varepsilon) + \cos(\alpha + \beta - \nu \cdot \varepsilon)] \right. \\ &+ \frac{1}{4} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\nu} [\cos(3\alpha + \beta - [\nu+4]\varepsilon) + \cos(3\alpha + \beta - [\nu+2]\varepsilon)] \\ &+ \frac{1}{4} \binom{4}{3} \frac{r_1^3 r_2}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\nu} [\cos(\alpha + 3\beta - [\nu+2]\varepsilon) + \cos(\alpha + 3\beta - \nu \cdot \varepsilon)] \\ &+ \frac{1}{6} \binom{6}{1} \frac{r_1^5 r_2}{R_2^6} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+5}{5} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\nu} [\cos(5\alpha + \beta - [\nu+6]\varepsilon) + \cos(5\alpha + \beta - [\nu+4]\varepsilon)] \\ &\left. + \dots \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

Berechnung des Teilintegrals $\frac{\partial M_c}{\partial z_I}$

Hierfür muß gebildet werden (vgl. S. 337)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathfrak{z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{1b2a}}{\bar{\mathfrak{z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{1b2b}} &= \frac{(1+b-a)(1+b+a)}{(1-b-a)(1-b+a)} = \frac{1+2b+b^2-a^2}{1-2b+b^2-a^2} \\ \ln \left(\frac{\bar{\mathfrak{z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{1b2a}}{\bar{\mathfrak{z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{1b2b}} \right) &\left\{ \approx 2b + b^2 - a^2 - \frac{1}{2}(2b + b^2 - a^2)^2 + \frac{1}{3}(2b + b^2 - a^2)^3 - \dots \right. \\ &\quad \left. - 2b + b^2 - a^2 - \frac{1}{2}(-2b + b^2 - a^2)^2 + \frac{1}{3}(-2b + b^2 - a^2)^3 - \dots \right. \\ &\approx 2 \left[2b - \frac{1}{2} \binom{2}{1} 2b(b^2 - a^2) + \frac{1}{3} \binom{3}{1} 2b(b^2 - a^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \binom{3}{3} (2b)^3 - \frac{1}{4} \binom{4}{1} 2b(b^2 - a^2)^3 - \frac{1}{4} \binom{4}{3} (2b)^3 (b^2 - a^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \binom{5}{1} 2b(b^2 - a^2)^4 + \dots \right] \\ &\approx 4 \left\{ \frac{1}{1} \binom{1}{1} b + \frac{1}{3} \left[\binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{3} b^3 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \left[\binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{5} b^5 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{7} [\dots] + \dots \right\} \\ \ln \frac{\bar{\mathfrak{z}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{1b2a}}{\bar{\mathfrak{z}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{1b2b}} &\approx 4 \left\{ \frac{1}{1} \binom{1}{1} \frac{r_2}{\bar{\mathfrak{z}}_0} e^{j\bar{\varphi}_1} + \frac{1}{3} \binom{3}{1} \frac{r_1^2 r_2}{\bar{\mathfrak{z}}_0^3} e^{j(2\varphi_1 + \bar{\varphi}_1)} + \frac{1}{3} \binom{3}{3} \frac{r_2^3}{\bar{\mathfrak{z}}_0^3} e^{j3\bar{\varphi}_1} + \frac{1}{5} \binom{5}{1} \frac{r_1^4 r_2}{\bar{\mathfrak{z}}_0^5} e^{j(4\varphi_1 + \bar{\varphi}_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \binom{5}{3} \frac{r_1^2 r_2^3}{\bar{\mathfrak{z}}_0^5} e^{j(2\varphi_1 + 3\bar{\varphi}_1)} + \frac{1}{5} \binom{5}{5} \frac{r_2^5}{\bar{\mathfrak{z}}_0^5} e^{j5\bar{\varphi}_1} + \frac{1}{7} \binom{7}{1} \frac{r_1^6 r_2}{\bar{\mathfrak{z}}_0^7} e^{j(6\varphi_1 + \bar{\varphi}_1)} + \dots \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Reihen für $(1/\bar{s}_0)^m$ erhalten wir:

$$\ln \frac{\bar{s}_{1a2a} \cdot \bar{s}_{1b2a}}{\bar{s}_{1a2b} \cdot \bar{s}_{1b2b}} \approx 4 \left\{ \frac{1}{1} \left(\frac{1}{1} \right) \frac{r_2}{R_2} e^{j(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_{l_2})} \left[1 + \left(\frac{1}{1} \right) \frac{R_1}{R_2} e^{j(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_1})} + \left(\frac{2}{2} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{j(2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3}{1} \right) \frac{r_1^2 r_2}{R_2^3} e^{j(2\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 - 3\bar{\varphi}_{l_2})} + \left(\frac{3}{3} \right) \frac{r_2^3}{R_2^3} e^{j(3\bar{\varphi}_2 - 3\bar{\varphi}_{l_2})} \right] \left[1 + \left(\frac{3}{1} \right) \frac{R_1}{R_2} e^{j(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_1})} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{2} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{j(2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] + \frac{1}{5} \left[\dots \right] \left[\dots \right] + \dots \left. \right\},$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial z_1} \approx - \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot 2 \cos(\bar{\varphi}_{l_2} - \varphi_1) \operatorname{Re} \ln \frac{\bar{s}_{1a2a} \cdot \bar{s}_{1b2a}}{\bar{s}_{1a2b} \cdot \bar{s}_{1b2b}} \\ \approx - \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot 8 \cos(\varphi_1 - \bar{\varphi}_{l_2}) \left\{ \left(\frac{1}{1} \right) \frac{r_2}{R_2} \cos(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_{l_2}) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{1} \right) \left(\frac{1}{1} \right) \frac{r_2 R_1}{R_2^2} \cos(\bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2}) + \left(\frac{1}{1} \right) \left(\frac{2}{2} \right) \frac{r_2 R_1^2}{R_2^3} \cos(\bar{\varphi}_2 + 2\varphi_{l_1} - 3\bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{1} \right) \left(\frac{2}{0} \right) \frac{r_1^2 r_2}{R_2^3} \cos(2\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 - 3\bar{\varphi}_{l_2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{1} \right) \left(\frac{3}{1} \right) \frac{r_1^2 r_2 R_1}{R_2^4} \cos(2\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 4\bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{3} \right) \left(\frac{2}{0} \right) \frac{r_2^3}{R_2^3} \cos(3\bar{\varphi}_2 - 3\bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{3} \right) \left(\frac{3}{1} \right) \frac{r_2^3 R_1}{R_2^4} \cos(3\bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 4\bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \right\}.$$

Wir führen wieder die „wirksamen“ Drallwinkel und den Kreuzungsdrallwinkel ein und bekommen:

$$\frac{\partial M_c}{\partial z_1} \approx - \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot 4 \left\{ \frac{1}{1} \left(\frac{1}{1} \right) \frac{r_2}{R_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu}{0} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(\alpha + \beta - [\nu + 1]\epsilon) + \cos(-\alpha + \beta - [\nu - 1]\epsilon)] \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{1} \right) \frac{r_1^2 r_2}{R_2^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(3\alpha + \beta - [\nu + 3]\epsilon) + \cos(\alpha + \beta - [\nu + 1]\epsilon)] \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{3} \right) \frac{r_2^3}{R_2^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(\alpha + 3\beta - [\nu + 1]\epsilon) + \cos(-\alpha + 3\beta - [\nu - 1]\epsilon)] \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{1} \right) \frac{r_1^4 r_2}{R_2^5} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+4}{4} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(5\alpha + \beta - [\nu + 5]\epsilon) + \cos(3\alpha + \beta - [\nu + 3]\epsilon)] \right. \\ \left. + \dots \right\}. \quad (9)$$

Berechnung des Teilintegrals $\frac{\partial M_d}{z \partial_1}$

Hierfür muß gebildet werden:

$$\frac{\bar{s}_{1a2a} \cdot \bar{s}_{1a2b}}{\bar{s}_{1b2a} \cdot \bar{s}_{1b2b}} = \frac{(1 + \mathfrak{b} - \mathfrak{a})(1 - \mathfrak{b} - \mathfrak{a})}{(1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{a})(1 - \mathfrak{b} + \mathfrak{a})} = \frac{1 - 2\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}{1 + 2\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}.$$

Dies entspricht dem Wert des Bruches bei $\frac{\partial M_c}{\partial z_1}$, wenn \mathfrak{a} und \mathfrak{b} sowie Zähler und Nenner vertauscht werden. Dementsprechend wird:

$$\ln \frac{\bar{s}_{1a2a} \cdot \bar{s}_{1a2b}}{\bar{s}_{1b2a} \cdot \bar{s}_{1b2b}} \approx -4 \left\{ \frac{1}{1} \left(\frac{1}{0} \right) \frac{r_1}{\bar{s}_0} e^{j\varphi_1} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{0} \right) \frac{r_1^3}{\bar{s}_0^3} e^{j3\varphi_1} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right) \frac{r_1 r_2^2}{\bar{s}_0^3} e^{j(\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2)} + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{0} \right) \frac{r_1^5}{\bar{s}_0^5} e^{j5\varphi_1} \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{2} \right) \frac{r_1^2 r_2^2}{\bar{s}_0^5} e^{j(3\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2)} + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{4} \right) \frac{r_1 r_2^4}{\bar{s}_0^5} e^{j(\varphi_1 + 4\bar{\varphi}_2)} + \frac{1}{7} \left(\frac{7}{0} \right) \frac{r_1^7}{\bar{s}_0^7} e^{j7\varphi_1} + \dots \right\}. \quad (10)$$

Nach Einsetzen der Reihen für $(1/\tilde{\varepsilon}_0)^m$ erhalten wir:

$$\ln \frac{\bar{\mathfrak{J}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{J}}_{1a2b}}{\bar{\mathfrak{J}}_{1b2a} \cdot \bar{\mathfrak{J}}_{1b2b}} \approx -4 \left\{ \frac{1}{1} \binom{1}{0} \frac{r_1}{R_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \bar{\varphi}_{l_2})} \left[1 + \binom{1}{1} \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{j(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_1})} + \binom{2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{j(2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_1})} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \left[\binom{3}{0} \frac{r_1^3}{R_2^3} e^{j(3\varphi_1 - 3\bar{\varphi}_{l_2})} + \binom{3}{2} \frac{r_1 r_2^2}{R_2^3} e^{j(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\bar{\varphi}_{l_2})} \right] \left[1 + \binom{3}{1} \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{j(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_1})} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \binom{4}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{j(2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] + \frac{1}{5} \left[\dots \right] \left[\dots \right] + \dots \right\},$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial z_1} \approx -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 2 \cos(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_2) \cdot \operatorname{Re} \ln \frac{\bar{\mathfrak{J}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{J}}_{1a2b}}{\bar{\mathfrak{J}}_{1b2a} \cdot \bar{\mathfrak{J}}_{1b2b}} \\ \approx + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 8 \cdot \cos \cdot (\bar{\varphi}_2 - \varphi_{l_1}) \left\{ \frac{1}{1} \binom{1}{0} \frac{r_1}{R_2} \cos(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{1} \binom{1}{0} \binom{1}{1} \frac{r_1 R_1}{R_2^2} \cos(\varphi_1 + \varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{1} \binom{1}{0} \binom{2}{2} \frac{r_1 R_1^2}{R_2^3} \cos(\varphi_1 + 2\varphi_{l_1} - 3\bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \binom{3}{0} \binom{2}{0} \frac{r_1^3}{R_2^3} \cos(3\varphi_1 - 3\bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{3} \binom{3}{0} \binom{3}{1} \frac{r_1^3 R_1}{R_2^4} \cos(3\varphi_1 + \varphi_{l_1} - 4\bar{\varphi}_{l_2}) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \binom{3}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1 r_2^2}{R_2^3} \cos(\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2 - 3\bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{3} \binom{3}{2} \binom{3}{1} \frac{r_1 r_2^2 R_1}{R_2^4} \cos(\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 4\bar{\varphi}_{l_2}) \right. \\ \left. + \dots \right\}.$$

Benutzen wir die „wirksamen“ Drallwinkel und den „Kreuzungsdrallwinkel“ (vgl. S. 339) so können wir das Ergebnis folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\partial M_d}{\partial z_1} \approx + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 4 \cdot \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot \left\{ \frac{1}{1} \binom{1}{0} \frac{r_1}{R_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu}{0} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(\alpha + \beta - \nu \cdot \varepsilon) + \cos(\alpha - \beta - [\nu + 2] \varepsilon)] \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \binom{3}{0} \frac{r_1^3}{R_2^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(3\alpha + \beta - [\nu + 2] \varepsilon) + \cos(3\alpha - \beta - [\nu + 4] \varepsilon)] \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \binom{3}{2} \frac{r_1 r_2^2}{R_2^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(\alpha + 3\beta - \nu \cdot \varepsilon) + \cos(\alpha + \beta - [\nu + 2] \varepsilon)] \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \binom{5}{0} \frac{r_1^5}{R_2^5} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+4}{4} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos(5\alpha + \beta - [\nu + 4] \varepsilon) + \cos(5\alpha - \beta - [\nu + 6] \varepsilon)] \right. \\ \left. + \dots \right\}. \quad (11)$$

Berechnung des Teilintegrals $\frac{\partial M_e}{\partial z_1}$

Hierfür muß gebildet werden:

$$\bar{\mathfrak{J}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{J}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{J}}_{1b2a} \cdot \bar{\mathfrak{J}}_{1b2b} = \tilde{\varepsilon}_0^4 (1 + a - b) (1 - b - a) (1 + b + a) (1 - b + a) \\ = \tilde{\varepsilon}_0^4 (1 - 2a + a^2 - b^2) (1 + 2a + a^2 - b^2) \\ = \tilde{\varepsilon}_0^4 (1 - 2a^2 - 2b^2 + a^4 - 2a^2 b^2 + b^4)$$

$$\begin{aligned}
 \ln (\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{B}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{B}}_{1b2a} \cdot \bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}) &\approx 4 \ln \mathfrak{s}_0 - 2 (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} [-2 (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3} [-2 (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2]^3 \\
 &\quad - \frac{1}{4} [\dots]^4 \\
 &\quad + \dots \\
 &\approx 4 \ln \mathfrak{s}_0 \\
 &\quad - \frac{2}{1} (a^2 + b^2) - \frac{2}{2} (a^4 + 6 a^2 b^2 + b^4) \\
 &\quad - \frac{2}{3} (a^6 + 15 a^4 b^2 + 15 a^2 b^4 + b^6) \\
 &\quad - \dots,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_e}{\partial z_1} &\approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 2 \cos (\varphi_1 - \bar{\varphi}_2) \left\{ 4 \ln \frac{|d_2|}{\gamma_e \cdot s_0 \cdot \pi} + \operatorname{Re} \ln \mathfrak{s}_0 \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{Re} \ln (\bar{\mathfrak{B}}_{1a2a} \cdot \bar{\mathfrak{B}}_{1a2b} \cdot \bar{\mathfrak{B}}_{1b2a} \cdot \bar{\mathfrak{B}}_{1b2b}) \right\} \\
 &\approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 2 \cos (\varphi_1 - \bar{\varphi}_2) \left\{ 4 \ln \frac{|d_2|}{\gamma_e \cdot s_0 \cdot \pi} + \operatorname{Re} \left[\frac{4}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{\mathfrak{s}_0^2} \cdot e^{j 2 \varphi_1} \right. \right. \\
 &\quad + \frac{4}{2} \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{\mathfrak{s}_0^2} \cdot e^{j 2 \bar{\varphi}_2} + \frac{4}{4} \binom{4}{0} \frac{r_1^4}{\mathfrak{s}_0^4} e^{j (4 \varphi_1)} + \frac{4}{4} \binom{4}{2} \frac{r_1^2 r_2^2}{\mathfrak{s}_0^4} e^{j (2 \varphi_1 + 2 \bar{\varphi}_2)} + \frac{4}{4} \binom{4}{4} \frac{r_2^4}{\mathfrak{s}_0^4} e^{j 4 \bar{\varphi}_2} \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4}{6} \binom{6}{0} \frac{r_1^6}{\mathfrak{s}_0^6} e^{j 6 \varphi_1} + \frac{4}{6} \binom{6}{2} \frac{r_1^4 r_2^2}{\mathfrak{s}_0^6} e^{j (4 \varphi_1 + 2 \bar{\varphi}_2)} + \dots \right] \right\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Reihen für $1/\mathfrak{s}_0^m$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_e}{\partial z_1} &\approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 2 \cos (\varphi_1 - \bar{\varphi}_2) \left\{ 4 \ln \frac{|d_2|}{\gamma_e \cdot s_0 \cdot \pi} + \operatorname{Re} \left[\frac{4}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{R_2^2} e^{j (2 \varphi_1 - 2 \bar{\varphi}_{l_2})} \right. \right. \\
 &\quad + \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{R_2^2} e^{j (2 \bar{\varphi}_2 - 2 \bar{\varphi}_{l_2})} \left. \left. \left| 1 + \binom{2}{1} \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{j (\varphi_{l_1} - \varphi_{l_2})} + \dots \right| + \frac{4}{4} \left[\binom{4}{0} \frac{r_1^4}{R_2^4} e^{j (4 \varphi_1 - 4 \bar{\varphi}_{l_2})} \right. \right. \right. \\
 &\quad + \binom{4}{2} \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^4} e^{j (2 \varphi_1 + 2 \bar{\varphi}_2 - 4 \bar{\varphi}_{l_2})} + \binom{4}{4} \frac{r_2^4}{R_2^4} e^{j (4 \bar{\varphi}_2 - 4 \bar{\varphi}_{l_2})} \left. \left. \left| 1 + \binom{4}{1} \frac{R_1}{R_2} e^{j (\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2})} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \binom{5}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{j (2 \varphi_{l_1} - 2 \bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] \right| \dots \right] + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_e}{\partial z_1} &\approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \operatorname{tg} \xi_{r_1} \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot 8 \cos (\varphi_1 - \bar{\varphi}_2) \left\{ \ln \frac{|d_2|}{\gamma_e \cdot s_0 \cdot \pi} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{R_2^2} \cos (2 \varphi_1 - 2 \bar{\varphi}_{l_2}) \quad + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{R_2^2} \cos (2 \bar{\varphi}_2 - 2 \bar{\varphi}_{l_2}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \binom{2}{0} \binom{2}{1} \frac{r_1^2 R_1}{R_2^3} \cos (2 \varphi_1 + \varphi_{l_1} - 3 \bar{\varphi}_{l_2}) \quad + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \binom{2}{1} \frac{r_2^2 R_1}{R_2^3} \cos (2 \bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 3 \bar{\varphi}_{l_2}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \binom{2}{0} \binom{3}{2} \frac{r_1^2 R_1^2}{R_2^4} \cos (2 \varphi_1 + 2 \varphi_{l_1} - 4 \bar{\varphi}_{l_2}) \quad + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \binom{3}{2} \frac{r_2^2 R_1^2}{R_2^4} \cos (2 \bar{\varphi}_2 + 2 \varphi_{l_1} - 4 \bar{\varphi}_{l_2}) \\
 &\quad + \dots \quad + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \binom{4}{0} \binom{3}{0} \frac{r_1^4}{R_2^4} \cos(4\varphi_1 - 4\varphi_{l_1}) & + \frac{1}{4} \binom{4}{2} \binom{3}{0} \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^4} \cos(2\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2 - 4\varphi_{l_1}) \\
& + \frac{1}{4} \binom{4}{0} \binom{4}{1} \frac{r_1^4 R_1}{R_2^5} \cos(4\varphi_1 + \varphi_{l_1} - 5\bar{\varphi}_{l_1}) & + \frac{1}{4} \binom{4}{2} \binom{4}{1} \frac{r_1^2 r_2^2 R_1}{R_2^5} \cos(2\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 5\bar{\varphi}_{l_1}) \\
& + \dots & + \dots \\
& + \frac{1}{4} \binom{4}{4} \binom{3}{0} \frac{r_2^4}{R_2^4} \cos(4\bar{\varphi}_2 - 4\bar{\varphi}_{l_2}) & + \dots \\
& + \frac{1}{4} \binom{4}{4} \binom{4}{1} \frac{r_2^4 R_1}{R_2^5} \cos(4\bar{\varphi}_2 + \varphi_{l_1} - 5\bar{\varphi}_{l_2}) & + \dots \\
& + \dots & + \dots
\end{aligned}$$

Mit den „wirksamen“ Drallwinkeln und dem „Kreuzungsdrallwinkel“ (vgl. S. 339) wird daraus:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial M_e}{\partial z_1} & \approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 4 \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \left\{ 2 \cos(\alpha - \beta - \varepsilon) \cdot \ln \frac{|d_2|}{\gamma_e \cdot s_0 \pi} \right. \\
& + \frac{1}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \left[\cos(3\alpha - \beta - [\nu+3]\varepsilon) + \cos(\alpha + \beta - [\nu+1]\varepsilon) \right] \\
& + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \left[\cos(\alpha + \beta - [\nu+1]\varepsilon) + \cos(-\alpha + 3\beta - [\nu-1]\varepsilon) \right] \\
& + \frac{1}{4} \binom{4}{0} \frac{r_1^4}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \left[\cos(5\alpha - \beta - [\nu+5]\varepsilon) + \cos(3\alpha + \beta - [\nu+3]\varepsilon) \right] \\
& + \frac{1}{4} \binom{4}{2} \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \left[\cos(3\alpha + \beta - [\nu+3]\varepsilon) + \cos(\alpha + 3\beta - [\nu+1]\varepsilon) \right] \\
& + \dots \left. \right\} \quad (13)
\end{aligned} \right.$$

Die Amplituden der Cosinus-Funktionen sind nicht mehr von z_1 abhängig. Nur in $\ln \frac{d_2}{\gamma_e s_0 \pi}$ ist noch eine Abhängigkeit von z_1 vorhanden. Wir formen diesen Wert deshalb folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{d_2}{\gamma_e s_0 \pi} & = \ln \frac{d_2}{\gamma_e \pi} - \operatorname{Re} \ln \bar{s}_0 \\
& = \ln \frac{d_2}{\gamma_e \pi} - \operatorname{Re} \ln (\bar{\Re}_2 - \Re_1) \\
& = \ln \frac{d_2}{\gamma_e \pi} - \operatorname{Re} \ln \bar{\Re}_2 - \operatorname{Re} \ln \left[1 - \frac{\Re_1}{\bar{\Re}_2} \right] \\
& \approx \ln \frac{d_2}{\gamma_e R_2 \pi} + \operatorname{Re} \left[\frac{\Re_1}{\bar{\Re}_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Re_1}{\bar{\Re}_2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Re_1}{\bar{\Re}_2} \right)^3 + \dots \right] \\
& \approx \ln \frac{d_2}{\gamma_e R_2 \pi} + \operatorname{Re} \left[\frac{R_1}{R_2} e^{j(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2})} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e^{j(2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2})} + \frac{1}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 e^{j(3\varphi_{l_1} - 3\bar{\varphi}_{l_2})} + \dots \right] \\
& \approx \ln \frac{d_2}{\gamma_e R_2 \pi} + \frac{R_1}{R_2} \cos(\varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cos(2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2}) \\
& \quad + \frac{1}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \cos(3\varphi_{l_1} - 3\bar{\varphi}_{l_2}) + \dots, \\
\ln \frac{d_2}{\gamma_e s_0 \pi} & = \ln \frac{d_2}{\gamma_e R_2 \pi} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos(\nu \cdot \varepsilon).
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_e}{\partial z_1} \approx & -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} 4 \operatorname{tg} \xi r_1 \operatorname{tg} \xi r_2 \left\{ 2 \cos (\alpha - \beta - \varepsilon) \cdot \ln \frac{|\vec{d}_2|}{\gamma_e R_2 \pi} \right. \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (\alpha - \beta - [\nu + 1] \varepsilon) + \cos (\alpha - \beta + [\nu - 1] \varepsilon)] \\ & + \frac{1}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (3\alpha - \beta - [\nu + 3] \varepsilon) + \cos (\alpha + \beta - [\nu + 1] \varepsilon)] \\ & + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (\alpha + \beta - [\nu + 1] \varepsilon) + \cos (-\alpha + 3\beta - [\nu - 1] \varepsilon)] \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{0} \frac{r_1^4}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (5\alpha - \beta - [\nu + 5] \varepsilon) + \cos (3\alpha + \beta - [\nu + 3] \varepsilon)] \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{2} \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (3\alpha + \beta - [\nu + 3] \varepsilon) + \cos (\alpha + 3\beta - [\nu + 1] \varepsilon)] \\ & + \dots \left. \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Gesamtergebnis für die magnetische Lage-Lage-Kopplung

Für die Teilintegrale $\frac{M_a}{\partial z_1}$, $\frac{M_b}{\partial z_1}$, $\frac{M_c}{\partial z_1}$, $\frac{M_d}{\partial z_1}$ und $\frac{M_e}{\partial z_1}$ sind die Näherungslösungen ermittelt. Sie enthalten alle eine Abhängigkeit von z_1 nur als lineare Abhängigkeit in den Argumenten der Cosinus-Funktionen. Die Integration über z_1 ist deshalb leicht durchzuführen. Da das Ergebnis nach der Integration nicht so übersichtlich darzustellen ist, wollen wir es vor der Integration zusammenfassen und die Integration nur an einem Beispiel durchführen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z_1} &= \frac{\partial M_a}{\partial z_1} + \frac{\partial M_b}{\partial z_1} + \frac{\partial M_c}{\partial z_1} + \frac{\partial M_d}{\partial z_1} + \frac{\partial M_e}{\partial z_1} \\ \frac{\partial M_a}{\partial z_1} \approx & -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \left\{ \frac{1}{2} \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (\alpha + \beta - [\nu + 1] \varepsilon) \right. \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (3\alpha + \beta - [\nu + 3] \varepsilon) \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{3} \frac{r_1 r_2^3}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (\alpha + 3\beta - [\nu + 1] \varepsilon) \\ & + \frac{1}{6} \binom{6}{1} \frac{r_1^5 r_2}{R_2^6} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+5}{5} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} \cos (5\alpha + \beta - [\nu + 5] \varepsilon) \\ & + \dots \left. \right\}. \\ \frac{\partial M_b}{\partial z_1} \approx & -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} 4 \operatorname{tg} \xi_{L_1} \operatorname{tg} \xi_{L_2} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (\alpha + \beta - [\nu + 2] \varepsilon) + \cos (\alpha + \beta - \nu \cdot \varepsilon)] \right. \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (3\alpha + \beta - [\nu + 4] \varepsilon) + \cos (3\alpha + \beta - [\nu + 2] \varepsilon)] \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{3} \frac{r_1 r_2^3}{R_2^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (\alpha + 3\beta - [\nu + 2] \varepsilon) + \cos (\alpha + 3\beta - \nu \cdot \varepsilon)] \\ & + \frac{1}{6} \binom{6}{1} \frac{r_1^5 r_2}{R_2^6} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+5}{5} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu} [\cos (5\alpha + \beta - [\nu + 6] \varepsilon) + \cos (5\alpha + \beta - [\nu + 4] \varepsilon)] \\ & + \dots \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial z_I} \approx - \frac{\mu_0 \mu_r}{2 \pi} \cdot 4 \operatorname{tg} \xi_{L_2} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_1}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{1}{1} \binom{1}{1} \frac{r_2}{R_2} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v}{0} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(\alpha + \beta - [v+1]\varepsilon) + \cos(-\alpha + \beta - [v-1]\varepsilon)] \right. \\ & + \frac{1}{3} \binom{3}{1} \frac{r_1^2 r_2}{R_2^3} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(3\alpha + \beta - [v+3]\varepsilon) + \cos(\alpha + \beta - [v+1]\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{3} \binom{3}{3} \frac{r_2^3}{R_2^3} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(\alpha + 3\beta - [v+1]\varepsilon) + \cos(-\alpha + 3\beta - [v-1]\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{5} \binom{5}{1} \frac{r_1^4 r_2}{R_2^5} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+4}{4} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(5\alpha + \beta - [v+5]\varepsilon) + \cos(3\alpha + \beta - [v+3]\varepsilon)] \\ & \left. + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial z_I} \approx + \frac{\mu_0 \mu_r}{2 \pi} \cdot 4 \operatorname{tg} \xi_{L_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{1}{1} \binom{1}{0} \frac{r_1}{R_2} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v}{0} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(\alpha + \beta - v\varepsilon) + \cos(\alpha - \beta - [v+2]\varepsilon)] \right. \\ & + \frac{1}{3} \binom{3}{0} \frac{r_1^3}{R_2^3} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(3\alpha + \beta - [v+2]\varepsilon) + \cos(3\alpha - \beta - [v+4]\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{3} \binom{3}{2} \frac{r_1 r_2^2}{R_2^3} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(\alpha + 3\beta - v\varepsilon) + \cos(\alpha + \beta - [v+2]\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{5} \binom{5}{0} \frac{r_1^5}{R_2^5} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+4}{4} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(5\alpha + \beta - [v+4]\varepsilon) + \cos(5\alpha - \beta - [v+6]\varepsilon)] \\ & \left. + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_e}{\partial z_I} & \approx + \frac{\mu_0 \mu_r}{2 \pi} \cdot 4 \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \left\{ 2 \cos(\alpha - \beta - \varepsilon) \cdot \ln \frac{|d_2|}{r_e R_2 \pi} \right. \\ & + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v+1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{v+1} [\cos(\alpha - \beta - [v+2]\varepsilon) + \cos(\alpha - \beta + v\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{R_2^2} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(3\alpha - \beta - [v+3]\varepsilon) + \cos(\alpha + \beta - [v+1]\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{R_2^2} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+1}{1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(\alpha + \beta - [v+1]\varepsilon) + \cos(-\alpha + 3\beta - [v-1]\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{0} \frac{r_1^4}{R_2^4} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(5\alpha - \beta - [v+5]\varepsilon) + \cos(3\alpha + \beta - [v+3]\varepsilon)] \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{2} \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^4} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+3}{3} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^v [\cos(3\alpha + \beta - [v+3]\varepsilon) + \cos(\alpha + 3\beta - [v+1]\varepsilon)] \\ & \left. + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Von z_I sind nur folgende Größen abhängig:

$$\begin{aligned}\alpha &= \varphi_1 - \varphi_{l_1} = \frac{2\pi}{d_1} \cdot z_I + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{d_{L_1}} z_I - \varphi_{l_{10}} = \left(\frac{2\pi}{d_1} - \frac{2\pi}{d_{L_1}} \right) z_I + \varphi_{10} - \varphi_{l_{10}}, \\ \beta &= \overline{\varphi_2} - \overline{\varphi_{l_2}} = \frac{2\pi}{d_2} \cdot z_I + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{d_{L_2}} z_I - \varphi_{l_{20}} = \left(\frac{2\pi}{d_2} - \frac{2\pi}{d_{L_2}} \right) z_I + \varphi_{20} - \varphi_{l_{20}}, \\ \varepsilon &= \overline{\varphi_{l_2}} - \overline{\varphi_{l_1}} = \left(\frac{2\pi}{d_{L_2}} - \frac{2\pi}{d_{L_1}} \right) z_I + \varphi_{l_{20}} - \varphi_{l_{10}}.\end{aligned}$$

Sie kommen nur als Linearkombinationen in den Argumenten der Cosinusfunktionen vor. Die Integration über z_I macht deshalb keine Schwierigkeiten. Wir wollen sie nicht für alle Glieder anschreiben, sondern als Beispiel nur für das erste Glied von $\frac{\partial M_a}{\partial z_I}$

$$\begin{aligned}& \int_0^l -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \cdot \frac{1}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1} \cos(\alpha + \beta - \varepsilon) dz_I \\&= -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \int_0^l \cos \left[2\pi \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_{L_2}} \right) z_I + \varphi_{10} + \varphi_{20} - 2\varphi_{l_{20}} \right] dz_I \\&= -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \left[\frac{1}{2\pi \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_{L_2}} \right)} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_{L_2}} \right) z_I + \varphi_{10} + \varphi_{20} - 2\varphi_{l_{20}} \right] \right]_0^l \\&= -\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \left\{ \frac{1}{2\pi \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_{L_2}} \right)} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_{L_2}} \right) \cdot l + \varphi_{10} + \varphi_{20} - 2\varphi_{l_{20}} \right] \right. \\&\quad \left. - \frac{1}{2\pi \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_{L_2}} \right)} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{20} - 2\varphi_{l_{20}}) \right\}.\end{aligned}$$

Man sieht, daß sich jedes einzelne Teiglied der Gegeninduktivität sinusförmig mit der Länge des Kabels ändert. Der jeweilige Wert für eine bestimmte Länge kann je nach den Anfangswinkeln zwischen einem positiven und negativen Höchstwert schwanken.

Die größte Gegeninduktivität (= größte magnetische Kopplung) tritt rechnerisch meistens dann auf, wenn das Argument in der Cosinus-Funktion des ersten Gliedes von $\frac{\partial M_a}{\partial z_I}$ immer Null ist, d. h., wenn:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_{L_2}} = 0$$

und gleichzeitig

$$\varphi_{10} + \varphi_{20} - 2\varphi_{l_{20}} = 0 \text{ oder } = \pi.$$

Dann wird der Anteil des ersten Gliedes

$$M_{a1} \approx \pm \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \int_0^l \cos(0) dz_I \approx \pm \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \frac{r_1 r_2}{R_2^2} \cdot l.$$

Für ein 24paariges Trägerfrequenz-Fernkabel mit 3 Sternvierern in der 1. Lage und 9 Sternvierern in der 2. Lage ist beispielsweise bei einer Länge von 426 m:

$$\begin{aligned}l &= 426\,000 \text{ mm}, \\ r_1 &= r_2 = 1,7 \text{ mm}, \\ R_1 &= 3,7 \text{ mm}, \\ R_2 &= 10,1 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Mit $\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{H}}{\text{mm}}$ wird

$$M_{a1} \approx \pm 16 \cdot \frac{1,7 \cdot 1,7}{10,1^2} \cdot 42,6 \cdot 10^{-6} \text{ H},$$

$$M_{a1} \approx \pm 19 \mu \text{ H}.$$

Dieser Wert wird praktisch im Kabel nicht erreicht, weil es nicht gelingt, die Bedingungen bei der Fertigung so genau einzuhalten.

Die Schärfe der Postbedingungen ist daraus ersichtlich, daß alle Gegeninduktivitäten in diesem Kabel kleiner als etwa $3/_{00}$ des theoretisch schlechtesten Wertes von $19 \mu\text{H}$ sein müssen, um sie zu erfüllen.

Magnetische Kopplungen innerhalb einer Lage

Als Sonderfall ergibt sich aus der Rechnung auch die Kopplung innerhalb einer Lage. Da in diesem Fall $|\mathfrak{R}_2| = |\mathfrak{R}_1|$ ist, gilt die Voraussetzung für die Reihenentwicklung von $(1/\mathfrak{z}_0)^m$ nicht mehr. Wir müssen also von den Gleichungen ausgehen, die das $(1/\mathfrak{z}_0)^m$ noch enthalten. Für die Kopplung innerhalb einer Lage ist

$$\mathfrak{z}_0 = \overline{\mathfrak{R}_2} - \overline{\mathfrak{R}_1} = s_0 \cdot e^{j \frac{\varphi_{l_1} + \overline{\varphi_{l_2}} + \pi}{2}}$$

betragsmäßig eine Konstante.

Aus der Gl. (5) gewinnen wir

$$\begin{aligned} \ln \frac{\overline{\mathfrak{z}_{1a2a}} \cdot \overline{\mathfrak{z}_{1b2b}}}{\overline{\mathfrak{z}_{1a2b}} \cdot \overline{\mathfrak{z}_{1b2a}}} \approx & 4 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \right) \frac{r_1 r_2}{s_0^2} \cdot e^{j(\varphi_1 + \overline{\varphi}_2 - \varphi_{l_1} - \overline{\varphi_{l_2}} - \pi)} \right. \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{1} \right) \frac{r_1^3 r_2}{s_0^4} \cdot e^{j(3\varphi_1 + \overline{\varphi}_2 - 2\varphi_{l_1} - 2\overline{\varphi_{l_2}} - 2\pi)} \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right) \frac{r_1 r_2^3}{s_0^4} \cdot e^{j(\varphi_1 + 3\overline{\varphi}_2 - 2\varphi_{l_1} - 2\overline{\varphi_{l_2}} - 2\pi)} \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{6}{1} \right) \frac{r_1^5 r_2}{s_0^6} \cdot e^{j(5\varphi_1 + \overline{\varphi}_2 - 3\varphi_{l_1} - 3\overline{\varphi_{l_2}} - 3\pi)} \\ & \left. + \dots \right]. \end{aligned}$$

Aus den Gl. (8) und (10) folgt entsprechend:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\overline{\mathfrak{z}_{1a2a}} \cdot \overline{\mathfrak{z}_{1b2a}}}{\overline{\mathfrak{z}_{1a2b}} \cdot \overline{\mathfrak{z}_{1b2b}}} \approx & 4 \left[\frac{1}{1} \left(\frac{1}{1} \right) \frac{r_2}{s_0} \cdot e^{j \left(\frac{2\overline{\varphi}_2 - \varphi_{l_1} - \overline{\varphi_{l_2}} - \pi}{2} \right)} \right. \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{1} \right) \frac{r_1^2 r_2}{s_0^3} \cdot e^{j \left(\frac{4\varphi_1 + 2\overline{\varphi}_2 - 3\varphi_{l_1} - 3\overline{\varphi_{l_2}} - 3\pi}{2} \right)} \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{3} \right) \frac{r_2^3}{s_0^3} \cdot e^{j \left(\frac{6\overline{\varphi}_2 - 3\varphi_{l_1} - 3\varphi_{l_2} - 3\pi}{2} \right)} \\ & + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{1} \right) \frac{r_1^4 r_2}{s_0^5} \cdot e^{j \left(\frac{8\varphi_1 + 2\overline{\varphi}_2 - 5\varphi_{l_1} - 5\overline{\varphi_{l_2}} - 5\pi}{2} \right)} \\ & \left. + \dots \right]. \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\overline{\mathfrak{B}}_{1a2a} \cdot \overline{\mathfrak{B}}_{1a2b}}{\overline{\mathfrak{B}}_{1b2a} \cdot \overline{\mathfrak{B}}_{1b2b}} \approx & -4 \left[\frac{1}{1} \binom{1}{0} \frac{r_1}{s_0} e^{j \frac{2\varphi_1 - \varphi_{l_1} - \overline{\varphi_{l_2}} - \pi}{2}} \right. \\ & + \frac{1}{3} \binom{3}{0} \frac{r_1^3}{s_0^3} e^{j \frac{6\varphi_1 - 3\varphi_{l_1} - 3\overline{\varphi_{l_2}} - 3\pi}{2}} \\ & + \frac{1}{3} \binom{3}{2} \frac{r_1 r_2^2}{s_0^3} e^{j \frac{2\varphi_1 + 4\overline{\varphi_2} - 3\varphi_{l_1} - 3\overline{\varphi_{l_2}} - 3\pi}{2}} \\ & + \frac{1}{5} \binom{5}{0} \frac{r_1^5}{s_0^5} e^{j \frac{10\varphi_1 - 5\varphi_{l_1} - 5\overline{\varphi_{l_2}} - 5\pi}{2}} \\ & \left. + \dots \right], \end{aligned}$$

sowie aus Gl. (12):

$$\begin{aligned} \ln (\overline{\mathfrak{B}}_{1a2a} \cdot \overline{\mathfrak{B}}_{1a2b} \cdot \overline{\mathfrak{B}}_{1b2a} \cdot \overline{\mathfrak{B}}_{1b2b}) \approx & 4 \ln \mathfrak{s}_0 \\ & - 4 \left[\frac{1}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{s_0^2} \cdot e^{j(2\varphi_1 - \varphi_{l_1} - \overline{\varphi_{l_2}} - \pi)} + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{s_0^2} \cdot e^{j(2\overline{\varphi_2} - \varphi_{l_1} - \overline{\varphi_{l_2}} - \pi)} \right. \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{0} \frac{r_1^4}{s_0^4} \cdot e^{j(4\varphi_1 - 2\varphi_{l_1} - 2\overline{\varphi_{l_2}} - 2\pi)} \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{2} \frac{r_1^2 r_2^2}{s_0^4} e^{j(2\varphi_1 + 2\overline{\varphi_2} - 2\varphi_{l_1} - 2\overline{\varphi_{l_2}} - 2\pi)} \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{4} \frac{r_2^4}{s_0^4} e^{j(4\overline{\varphi_2} - 2\varphi_{l_1} - 2\overline{\varphi_{l_2}} - 2\pi)} + \frac{1}{6} \binom{6}{0} \frac{r_1^6}{s_0^6} e^{j(6\varphi_1 - 3\varphi_{l_1} - 3\overline{\varphi_{l_2}} - 3\pi)} \\ & \left. + \dots \right]. \end{aligned}$$

Wir können diese Werte in die Gln. (4) für die Teilinduktivitäten einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial z_I} \approx & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} 8 \left[\frac{1}{2} \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{s_0^2} \cos(\varphi_1 + \overline{\varphi_2} - \varphi_{l_1} - \overline{\varphi_{l_2}}) \right. \\ & - \frac{1}{4} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{s_0^4} \cos(3\varphi_1 + \overline{\varphi_2} - 2\varphi_{l_1} - 2\overline{\varphi_{l_2}}) \\ & - \frac{1}{4} \binom{4}{3} \frac{r_1 r_2^3}{s_0^4} \cos(\varphi_1 + 3\overline{\varphi_2} - 2\varphi_{l_1} - 2\overline{\varphi_{l_2}}) \\ & + \frac{1}{6} \binom{6}{1} \frac{r_1^5 r_2}{s_0^6} \cos(5\varphi_1 + \overline{\varphi_2} - 3\varphi_{l_1} - 3\overline{\varphi_{l_2}}) \\ & \left. + \dots - \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_b}{\partial z_I} = & \operatorname{tg}^2 \xi_L \cos(\overline{\varphi_{l_2}} - \varphi_{l_1}) \cdot \frac{\partial M_a}{\partial z_I}, \\ \frac{\partial M_c}{\partial z_I} \approx & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \operatorname{tg} \xi_L \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot \cos(\varphi_1 - \overline{\varphi_{l_2}}) \cdot \left[-\frac{1}{1} \binom{1}{1} \frac{r_2}{s_0} \sin\left(\overline{\varphi_2} - \frac{\varphi_{l_1} + \overline{\varphi_{l_2}}}{2}\right) \right. \\ & + \frac{1}{3} \binom{3}{1} \frac{r_1^2 r_2}{s_0^3} \sin\left(2\varphi_1 + \overline{\varphi_2} - \frac{3\varphi_{l_1} + 3\overline{\varphi_{l_2}}}{2}\right) + \frac{1}{3} \binom{3}{3} \frac{r_2^3}{s_0^3} \sin\left(3\overline{\varphi_2} - \frac{3\varphi_{l_1} + 3\overline{\varphi_{l_2}}}{2}\right) \\ & \left. - \frac{1}{5} \binom{5}{1} \frac{r_1^4 r_2}{s_0^5} \sin\left(4\varphi_1 + \overline{\varphi_2} - \frac{5\varphi_{l_1} + 5\overline{\varphi_{l_2}}}{2}\right) - \dots + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_d}{\partial z_I} \approx & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \operatorname{tg} \xi_L \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot \cos(\bar{\varphi}_2 - \varphi_{l_1}) \left[+ \frac{1}{1} \binom{1}{0} \frac{r_1}{s_0} \sin\left(\varphi_1 - \frac{\varphi_{l_1} + \bar{\varphi}_{l_2}}{2}\right) \right. \\ & - \frac{1}{3} \binom{3}{0} \frac{r_1^3}{s_0^3} \sin\left(3\varphi_1 - \frac{3\varphi_{l_1} + 3\bar{\varphi}_{l_2}}{2}\right) - \frac{1}{3} \binom{3}{2} \frac{r_1 r_2^2}{s_0^3} \sin\left(\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2 - \frac{3\varphi_{l_1} + 3\bar{\varphi}_{l_2}}{2}\right) \\ & \left. + \frac{1}{5} \binom{5}{0} \frac{r_1^5}{s_0^5} \sin\left(5\varphi_1 - \frac{5\varphi_{l_1} + 5\bar{\varphi}_{l_2}}{2}\right) + \dots - \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_e}{\partial z_I} \approx & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} 8 \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \cdot \cos(\varphi_1 - \bar{\varphi}_2) \cdot \left[\ln \frac{|d_2|}{\gamma_e s_0 \pi} - \frac{1}{2} \binom{2}{0} \frac{r_1^2}{s_0^2} \cdot \cos(2\varphi_1 - \varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2}) \right. \\ & - \frac{1}{2} \binom{2}{2} \frac{r_2^2}{s_0^2} \cdot \cos(2\bar{\varphi}_2 - \varphi_{l_1} - \bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{4} \binom{4}{0} \frac{r_1^4}{s_0^4} \cos(4\varphi_1 - 2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2}) \\ & + \frac{1}{4} \binom{4}{2} \frac{r_1^2 r_2^2}{s_0^4} \cos(2\varphi_1 + 2\bar{\varphi}_2 - 2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2}) + \frac{1}{4} \binom{4}{4} \frac{r_2^4}{s_0^4} \cos(4\bar{\varphi}_2 - 2\varphi_{l_1} - 2\bar{\varphi}_{l_2}) \\ & \left. - \frac{1}{6} \binom{6}{0} \frac{r_1^6}{s_0^6} \cos(6\varphi_1 - 3\varphi_{l_1} - 3\bar{\varphi}_{l_2}) - \dots + \dots \right]. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der „wirksamen“ Drallwinkel α_0 , β_0 und des konstanten Winkels ε_0 , der die Lage der beiden Vierer in der Lage zueinander festlegt, läßt sich das Ergebnis folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\partial M}{\partial z_I} = \frac{\partial M_a}{\partial z_I} + \frac{\partial M_b}{\partial z_I} + \frac{\partial M_c}{\partial z_I} + \frac{\partial M_d}{\partial z_I} + \frac{\partial M_e}{\partial z_I}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial z_I} \approx & + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \left[\frac{1}{2} \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{s_0^2} \cdot \cos(\alpha_0 + \beta_0) \right. \\ & - \frac{1}{4} \binom{4}{1} \frac{r_1^3 r_2}{s_0^4} \cos(3\alpha_0 + \beta_0) \\ & - \frac{1}{4} \binom{4}{3} \frac{r_1 r_2^3}{s_0^4} \cos(\alpha_0 + 3\beta_0) \\ & + \frac{1}{6} \binom{6}{1} \frac{r_1^5 r_2}{s_0^6} \cos(5\alpha_0 + \beta_0) \\ & \left. + \dots \right], \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \varphi_1 - \frac{\varphi_{l_1} + \bar{\varphi}_{l_2}}{2}, \\ \beta_0 &= \bar{\varphi}_2 - \frac{\varphi_{l_1} + \varphi_{l_2}}{2}, \\ \varepsilon_0 &= \bar{\varphi}_{l_2} - \varphi_{l_1} \\ &= \varphi_{l_{20}} - \varphi_{l_{10}}, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_b}{\partial z_I} &\approx \operatorname{tg}^2 \xi_L \cdot \cos \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial M_a}{\partial z_I}, \\ \frac{\partial M_c}{\partial z_I} &\approx + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 4 \operatorname{tg} \xi_L \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_1} \\ &\times \left\{ - \frac{1}{1} \binom{1}{1} \frac{r_2}{s_0} \left[\sin\left(\alpha_0 + \beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) + \sin\left(-\alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) \right] \right. \\ &+ \frac{1}{3} \binom{3}{1} \frac{r_1^2 r_2}{s_0^3} \left[\sin\left(3\alpha_0 + \beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) + \sin\left(\alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \binom{3}{3} \frac{r_2^3}{s_0^3} \left[\sin\left(\alpha_0 + 3\beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) + \sin\left(-\alpha_0 + 3\beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) \right] \\ &- \frac{1}{5} \binom{5}{1} \frac{r_1^4 r_2}{s_0^5} \left[\sin\left(5\alpha_0 + \beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) + \sin\left(3\alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) \right] \\ &\left. - \dots \right\} \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_d}{dz_1} &\approx + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 4 \operatorname{tg} \xi_L \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_1} \\
 &\times \left\{ + \frac{1}{1} \left(\frac{1}{0} \right) \frac{r_1}{s_0} \left[\sin \left(\alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) + \sin \alpha_0 - \beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right] \right. \\
 &\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{0} \right) \frac{r_1^3}{s_0^3} \left[\sin \left(3 \alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) + \sin \left(3 \alpha_0 - \beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right) \frac{r_1}{s_0^2} \left[\sin \left(\alpha_0 + 3 \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) + \sin \left(\alpha_0 + \beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{0} \right) \frac{r_1^5}{s_0^5} \left[\sin \left(5 \alpha_0 + \beta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) + \sin \left(5 \alpha_0 - \beta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right) \right] \\
 &\quad \left. + \dots \right\}, \\
 \frac{\partial M_e}{\partial z_1} &\approx + \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} 4 \operatorname{tg} \xi_{r_1} \cdot \operatorname{tg} \xi_{r_2} \left\{ 2 \cos (\alpha_0 - \beta_0) \cdot \ln \frac{|d_2|}{\gamma_e s_0 \pi} \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{0} \right) \frac{r_1^2}{s_0^2} [\cos (3 \alpha_0 - \beta_0) + \cos (\alpha_0 + \beta_0)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} \right) \frac{r_2^2}{s_0^2} [\cos (\alpha_0 + \beta_0) + \cos (-\alpha_0 + 3 \beta_0)] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{0} \right) \frac{r_1^4}{s_0^4} [\cos (5 \alpha_0 - \beta_0) + \cos (3 \alpha_0 + \beta_0)] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{2} \right) \frac{r_1^2 r_2^2}{s_0^4} [\cos (3 \alpha_0 + \beta_0) + \cos (\alpha_0 + 3 \beta_0)] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{4} \right) \frac{r_2^4}{s_0^4} [\cos (\alpha_0 + 3 \beta_0) + \cos (-\alpha_0 + 5 \beta_0)] \\
 &\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{6}{0} \right) \frac{r_1^6}{s_0^6} [\cos (7 \alpha_0 - \beta_0) + \cos (5 \alpha_0 + \beta_0)] \\
 &\quad \left. - \dots \right\}.
 \end{aligned} \tag{15b}$$

Zahlenbeispiel

Vier Vierer sind in einer Lage miteinander verseilt. Wie groß sind die magnetischen Kopplungen zwischen den a -Stämmen der verschiedenen Vierer? Die Viererschlaglängen sind: 90 mm

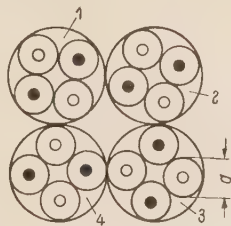


Bild 2. Querschnittsbild eines Kabels mit vier Vierern in einer Lage.

links, 90 mm rechts, 180 mm links und 120 mm rechts. Die Lagenschlaglänge ist 360 mm rechts. Der Anfangsdrallwinkel des 3. Vierers sei 90° . Alle anderen Anfangsdrallwinkel der Vierer und der Anfangsdrallwinkel der Lage für den 1. Vierer sind gleich Null. Der Drahtdurchmesser beträgt 1,2 mm, der Durchmesser der isolierten Ader 3,1 mm.

Damit ist:

$$g = 3,1 \text{ mm}, \quad r = g \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = 2,2 \text{ mm}.$$

¹ Innerhalb der Lage ist die Bevorzugung von d_2 gegenüber d_1 nicht berechtigt. Man sollte deshalb nach einem Vorschlag von BREMICKER [4] hier $|\sqrt{d_1 d_2}|$ statt $|d_2|$ schreiben.

Für benachbarte Vierer ist $s_{01} = 2r + g = g(1 + \sqrt{2}) = 7,5 \text{ mm}$. Für gegenüberliegende Vierer ist $s_{02} = \sqrt{2} \cdot s_{01} = 10,6 \text{ mm}$.

$$\frac{r}{s_{01}} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,293, \quad \frac{r}{s_{02}} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) = 0,207,$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{90} \cdot z, \quad \varphi_{l_1} = -\frac{2\pi}{360} \cdot z,$$

$$\varphi_2 = -\frac{2\pi}{90} \cdot z, \quad \varphi_{l_2} = -\frac{2\pi}{360} z - \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_3 = \frac{2\pi}{180} \cdot z + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{l_3} = -\frac{2\pi}{360} z - \pi,$$

$$\varphi_4 = -\frac{2\pi}{120} z, \quad \varphi_{l_4} = -\frac{2\pi}{360} z - \frac{3}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tg} \xi_L = \frac{-2\pi}{360} \cdot 5,3 = -0,092,$$

$$\operatorname{tg} \xi_{r_1} = \frac{2\pi}{90} \cdot 2,2 = +0,153, \quad \operatorname{tg} \xi_{r_2} = -\frac{2\pi}{90} \cdot 2,2 = -0,153,$$

$$\operatorname{tg} \xi_{r_3} = \frac{2\pi}{180} \cdot 2,2 = +0,077, \quad \operatorname{tg} \xi_{r_4} = -\frac{2\pi}{120} \cdot 2,2 = -0,115,$$

$$\gamma_e = 0,577, \quad \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-10}}{2\pi} = 0,2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{H}}{\text{mm}} = 0,2 \frac{\text{nH}}{\text{mm}}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (15) ein, so ergeben sich in 2 Fällen in den Argumenten der Winkelfunktionen Werte, die nicht von z abhängen. Das ergibt Kopplungswerte, die proportional mit der Länge ansteigen, also für Kabelkonstruktionen unbrauchbar sind. Es handelt sich um die Kopplungen zwischen 1 und 2 sowie zwischen 2 und 3. Das 9. Teiglied von $\frac{\partial M_a}{\partial z_1}$

$$\frac{\partial M_{a9}}{\partial z_1} \approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \cdot 8 \left[-\frac{1}{8} \binom{8}{5} \frac{r_1^3 r_2^5}{s_0^8} \cos(3\alpha_0 + 5\beta_0) \right]$$

wird für die Beziehung 1—2:

$$\frac{\partial M_{a9}}{\partial z_1} \approx -0,00061 \frac{\text{nH}}{\text{mm}}.$$

Für 300 m Kabellänge wird $M_{a9} \approx -183 \text{ nH}$! Das 1. Teiglied von $\frac{\partial M_a}{\partial z_1}$

$$\frac{\partial M_{a1}}{\partial z_1} \approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} 8 \left[\frac{1}{2} \binom{2}{1} \frac{r_1 r_2}{s_0^2} \cos(\alpha_0 + \beta_0) \right]$$

wird für die Beziehung 2—3

$$\frac{\partial M_{a1}}{\partial z_1} \approx -0,138 \frac{\text{nH}}{\text{mm}}.$$

Für 300 m Kabellänge wird $M_{a1} \approx -41400 \text{ nH}$! Auch die ersten Teiglieder von M_e und M_a ergeben für diese Beziehung längsproportionale Anteile, die jedoch gegen M_{a1} klein sind.

Bei den nicht längsproportionalen Anteilen genügt es, das 1. und 3. Glied von M_a sowie das 1. Glied von M_e zu berücksichtigen, um bei der hier vorliegenden Konstruktion alle über 0,2 nH hinausgehenden Amplituden einzelner Schwingungen zu erfassen.

Für die einzelnen Beziehungen erhalten wir folgende Werte; wobei z in mm eingesetzt werden muß:

Vierer 1 — Vierer 2 (jeweils Stamm a)

$$M \approx \underbrace{+3,94 \cos \frac{2\pi}{180} z - 3,94}_{M_{a1}} - \underbrace{0,51 \sin \frac{2\pi}{45} z}_{M_{e1}} - \underbrace{0,00061 \cdot z}_{M_{a9}} \quad \text{nH}$$

Vierer 1 — Vierer 3

$$M \approx \underbrace{-1,20 \cos \frac{2\pi}{180} z + 1,20}_{M_{e1}} - \underbrace{0,48 \cos \frac{2\pi}{45} z + 0,48}_{M_{a1}} \quad \text{nH}$$

Vierer 1 — Vierer 4

$$M \approx \underbrace{-2,64 \cos \frac{2\pi}{120} z + 2,64}_{M_{a1}} + \underbrace{0,68 \sin \frac{2\pi}{360} z}_{M_{a2}} - \underbrace{0,51 \sin \frac{14\pi}{360} z}_{M_{e1}} \quad \text{nH}$$

Vierer 2 — Vierer 3

$$M \approx \underbrace{-0,138 z}_{M_{a1}} - \underbrace{0,46 \cos \frac{2\pi}{60} z + 0,46}_{M_{e1}} \quad \text{nH}$$

Vierer 2 — Vierer 4

$$M \approx \underbrace{+2,96 \sin \frac{2\pi}{360} z}_{M_{e1}} - \underbrace{0,78 \sin \frac{2\pi}{72} z}_{M_{a1}} \quad \text{nH}$$

Vierer 3 — Vierer 4

$$M \approx \underbrace{-7,88 \sin \frac{2\pi}{360} z}_{M_{a1}} - \underbrace{0,35 \cos \frac{2\pi}{72} z + 0,35}_{M_{e1}} - \underbrace{0,23 \cos \frac{2\pi}{120} z + 0,23}_{M_{a3}} \quad \text{nH}$$

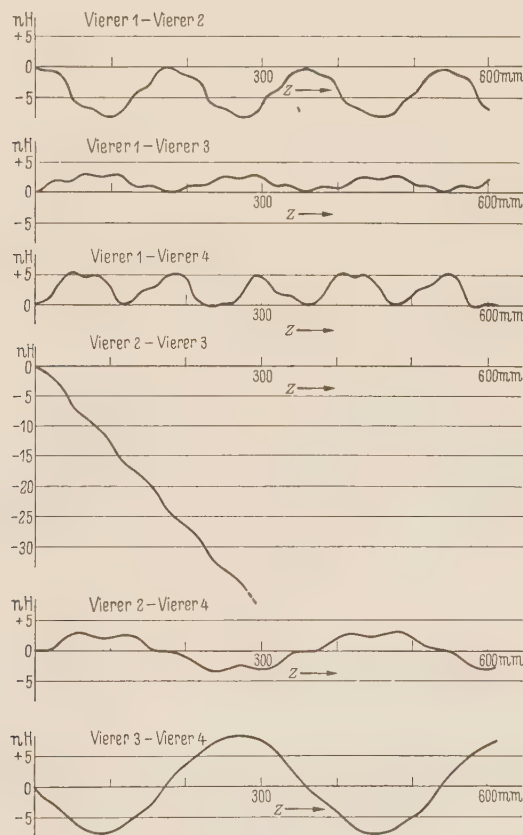


Bild 3. Magnetische Kopplungen zwischen den a -Stämmen der Vierer.

Der Kopplungsverlauf für die ersten 600 mm Kabellänge ist in Bild 3 für die verschiedenen Kopplungen zwischen den a -Stämmen der Vierer aufgezeichnet. Entsprechende Werte lassen

sich für die Kopplungen zwischen den b -Stämmen und zwischen a -Stamm des einen Vierers und b -Stamm des anderen Vierers ermitteln. Wird in einer „Phantom“-Schaltung der a -Stamm eines Vierers als Hinleitung und der b -Stamm als Rückleitung benutzt, so ändern sich die Kopplungsgleichungen.

Zusammenfassung und Erläuterung der Ergebnisse

Ausgehend von der allgemeinen Formel für die Gegeninduktivität zweier Stromkreise geringen Querschnitts werden die allgemeinen Gleichungen für die magnetischen Kopplungen zweier Paare bzw. der Stämme zweier Sternvierer in verschiedenen Lagen abgeleitet. Als Sonderfall werden am Schluß die Kopplungen innerhalb einer Lage behandelt. Im Gegensatz zu den Arbeiten von SCHILLER [2], SIEBER und SCHLUMP [3] werden dabei auch die nicht achsparallelen Komponenten der Stromwege berücksichtigt, die das Ergebnis entscheidend beeinflussen.

Für die Berechnung der Integrale, die BREMICKER [4] auf einem interessanten, aber analytisch schwierigeren Wege schon gelungen ist, wird eine Reihenentwicklung der Wurzel ausdrücke vorgenommen. Wegen des geringen Einflusses entfernt liegender Stellen wird der Bereich der ersten Integration von der endlichen Kabellänge auf eine unendliche Länge ausgedehnt.

Die Gegeninduktivität ergibt sich als Überlagerung einer großen Zahl sinusförmig mit der Kabellänge veränderlicher Einzelwellen, deren Amplitude angegeben wird. Sie können bei ungünstig gewählten Schlaglängen zu proportional mit der Kabellänge anwachsenden Größen entarten. Besonders gefährlich erweisen sich niedrige ungeradzahlige Verhältnisse ($1/1$, $1/3$, $3/5$) der „wirksamen“ Viererdrallwinkel in Verbindung mit bestimmten Vielfachen der „Kreuzungsdrallwinkel“. Umgekehrte Drallrichtung führt zu viel höheren Kopplungswerten als gleiche Drallrichtung. Werden nach SIEBER und SCHLUMP [3] nur die achsparallelen Komponenten der Stromwege berücksichtigt (vgl. das Integral M_a auf S. 334, 345 und 350), so zeigt die genaue Rechnung, daß innerhalb der Lage ungeradzahlige Drallwinkelverhältnisse bei gleicher Schlagrichtung keine größeren längsproportionalen Kopplungen ergeben, was mit der Erfahrung in Widerspruch steht. Durch die nicht achsparallelen Komponenten der Stromwege erhält man in diesem Fall magnetische Kopplungen in der beobachteten Größe (vgl. insbesondere das Integral M_e auf S. 334, 346 und 351).

Schrifttum

- [1] DALZELL, D. P.: A new Contribution to Rational design of Telephone Cables. Electr. Communication 8 (1930) Nr. 3, S. 173. — [2] SCHILLER, H.: Über Nebensprechstörungen in Fernsprechkabeln. ENT 8 (1931) S. 114—121 u. 9 (1932) S. 81—91. — [3] SIEBER, K. und SCHLUMP, K.: Beitrag zur Theorie des Aufbaus störungsarmer Fernsprechkabel. ENT 11 (1934) S. 119. — [4] BREMICKER, H.: Über die Amplitude der drallabhängigen elektromagnetischen Kopplungen in symmetrischen Fernmeldekabeln. Dissertation T. H. Darmstadt 1953. — [5] KLEIN, W.: Die Theorie des Nebensprechens auf Leitungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1955. — [6] BARANOW, N.: Influence des pas de torsion sur l'inductance mutuelle entre deux paires parallèles spiralées d'une voie de transmission téléphonique. Rev. Gen. de l'Electr. 52 (1943) S. 181—188 u. 53 (1944) S. 51—56.

Prof. Dr.-Ing. HERM. LAU, Hannover, Geibelstr. 101^{III}r.

Entladung einer Induktivität über veränderlichen ohmschen Widerstand

Von

H. WEH und M. FRISTER, Rheydt

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 2. März 1959)

Übersicht. Die Aufgabe, die in einer Induktivität gespeicherte magnetische Energie in möglichst kurzer Zeit abklingen zu lassen, wird vielfach mit der Forderung nach Einhaltung einer höchst-zulässigen Spannung während des Abklingvorganges verbunden. Zunächst wird die Ideallösung gesucht, die sich aber praktisch nicht oder nur schwer verwirklichen läßt. Eine technisch einfache Lösung ist die Ausnützung der Temperaturabhängigkeit ohmscher Widerstände zur Abkürzung der Entladungszeit. Die Gleichungen dieser Lösung werden abgeleitet und mit den Ergebnissen der Schaltung mit temperaturunabhängigem Widerstand verglichen.

A. Einleitung

In vielen Anwendungsfällen soll die magnetische Energie einer Induktivität in möglichst kurzer Zeit in einem ohmschen Widerstand in Wärme verwandelt werden. Bei einem temperatur-unabhängigen Endladungswiderstand verlaufen Strom und Spannung während des Abkling-vorganges nach e -Funktionen mit negativen Exponenten, wobei die Zeitkonstante bekanntlich R/L beträgt, mit R dem gesamten ohmschen Widerstand und L der Induktivität des Stromkreises.

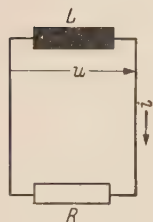


Bild 1. Ersatzschaltbild.

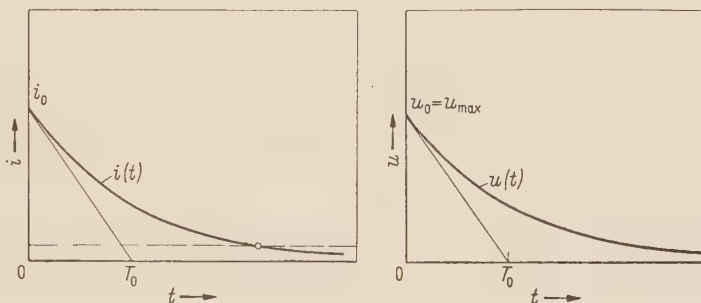


Bild 2. Verlauf von Strom i und Spannung u in Abhängigkeit von der Zeit t für $R = \text{const.}$

Der Höchstwert der Spannung tritt im ersten Augenblick des Entladevorganges auf. Die Größe der Spannung ist durch das Produkt $R \cdot i_0$ gegeben, wobei i_0 der vor dem Zuschalten des Entladungswiderstandes durch die Induktivität L fließende Strom ist, (Bild 1). Eine Verminderung der Entladungszeit ist durch Vergrößerung des Widerstandes R möglich. Damit wird jedoch gleichzeitig die Spannung an der Induktivität vergrößert, was nur bis zu einer bestimmten, durch die Isolation bedingten Grenze möglich ist. Will man die Entladungszeit ohne die gegebene Spannungsgrenze zu überschreiten weiter vermindern, so muß man den ohmschen Widerstand während der Entladung vergrößern.

B. Entladung über stetig veränderlichen ohmschen Widerstand

Der Spannungsverlauf für konstanten Widerstand (Bild 2) legt den Gedanken nahe, eine Beschleunigung des Abklingvorganges durch eine nach dem Abschalten der Spannungsquelle einsetzende zunehmende Vergrößerung des Entladungswiderstandes vorzunehmen. Die gegebene Spannungsfestigkeit der Anordnung wird am besten ausgenützt, wenn der Widerstand so gesteuert wird, daß die Spannung während des Abklingvorganges dauernd den Maximalwert einhält. Die Spannungsgleichung für den aus Induktivität L und ohmschen Widerstand R bestehenden Kreis lautet:

$$i' \cdot L = -u_0 = \text{const.}, \quad (1)$$

wenn mit i der Strom, i' dessen zeitliche Ableitung, und mit

$$u_0 = R \cdot i \quad (2)$$

die konstant gehaltene Spannung an der Induktivität bezeichnet wird. Mit dem Anfangswert i_0 für den Strom zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet die Lösung der Differentialgleichung (1)

$$i = i_0 \left(1 - \frac{t}{T_0} \right) \quad (3)$$

wobei $T_0 = \frac{L}{R_0}$ die Bedeutung der Abklingzeit hat, nach der $i = 0$ ist und R_0 das Zeichen für den Anfangswert des ohmschen Widerstandes ist. Dieser Stromverlauf (Bild 3) setzt eine zeitliche Änderung des Widerstandes nach Gl. (4) voraus, die aus den Gln. (2) und (3) hergeleitet wird.

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 - \frac{t}{T_0}} = 1 + \frac{t}{T_0} + \left(\frac{t}{T_0} \right)^2 + \left(\frac{t}{T_0} \right)^3 + \dots \quad (4)$$

Hiernach wächst für $t \rightarrow T_0$ der Widerstand R über alle Grenzen, während der Strom gegen den Wert 0 geht (Bild 4). Die in Gl. (4) verlangte Widerstandsänderung mit der Zeit ist technisch

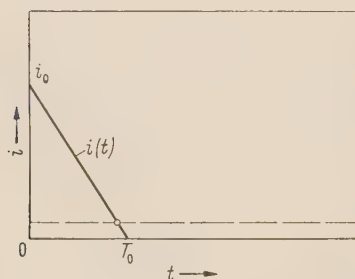


Bild 3. Verlauf von Strom i und Spannung u in Abhängigkeit von der Zeit bei stetig veränderlichem Widerstand.

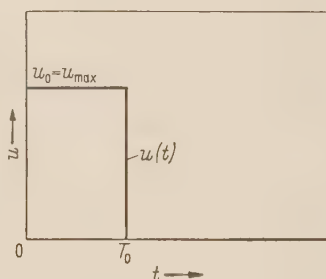


Bild 4. Verlauf des Widerstandes in Abhängigkeit von der Zeit nach Gl. (4).

nur unvollkommen zu verwirklichen. Eine Annäherung an diesen Verlauf ist denkbar. Oft kann man sich damit begnügen, den Abklingvorgang als beendet anzusehen, wenn der Strom auf z. B. 10% seines Anfangswertes abgeklungen ist. In solchen Fällen erlaubt die Ausnutzung der Temperaturabhängigkeit des Widerstandsmaterials eine selbsttätige und wirksame Verminderung der Abklingzeit.

C. Entladung über temperaturabhängigen Widerstand

Vielfach ist man bestrebt, den Temperatureinfluß auf Widerstände nach Möglichkeit auszuschalten. Dazu werden die Widerstände aus Baustoffen mit kleinen Temperaturkoeffizienten hergestellt. Zur Beschleunigung des Abklingvorganges ist es jedoch nützlich, stark temperaturabhängige Widerstände zu verwenden. Die im Widerstand in Wärme verwandelte magnetische Energie der Induktivität bewirkt dann eine selbsttätige Vergrößerung des Widerstandes während des Abklingvorganges, der damit beschleunigt wird.

1. Voraussetzungen und Ableitung der Differentialgleichungen

In den meisten Fällen, in denen zur Beschleunigung des Entladungsvorganges ohmsche Widerstände eingeschaltet werden, darf man voraussetzen, daß die Größe dieser ohmschen Widerstände ein Mehrfaches des ohmschen Widerstandes des übrigen Kreises betragen. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen und den Rechnungsgang zu vereinfachen, wird der gesamte ohmsche Widerstand des Stromkreises in gleicher Weise temperaturabhängig angenommen. In dem hier in Frage kommenden Bereich kann mit guter Annäherung ein linearer Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur vorausgesetzt werden. Mit R_0 dem kalten Widerstand zum Zeitpunkt 0

und α dem Temperaturbeiwert errechnet sich der Widerstand bei der Erwärmung ϑ innerhalb des hier in Frage kommenden Bereichs genügend genau zu

$$R_w = R_0(1 + \alpha \vartheta) . \quad (5)$$

Das Spannungsgleichgewicht des einfachen Stromkreises nach Bild 1 wird mit L der Induktivität, i dem Strom, i' der zeitlichen Ableitung dargestellt durch

$$L \cdot i' + R_0(1 + \alpha \vartheta) i = 0 . \quad (6)$$

Eine weitere Voraussetzung bildet die Annahme vernachlässigbar kleiner Wärmeabgabe des Widerstandes während des Entladungsvorganges. Diese Annahme wird häufig dadurch gerechtfertigt sein, daß der Abklingvorgang sich innerhalb sehr kurzer Zeit (im Bereich weniger Sekunden) abspielt und die konstruktive Anordnung solcher Widerstände auch so gewählt werden kann, daß eine Wärmeabgabe weitgehend ausgeschaltet wird. Hiernach darf man also annehmen, daß die gesamte Stromwärme im Widerstand zu dessen Temperaturerhöhung dient. Mit c der spezifischen Wärme des Widerstandsmaterials und G dem Gewicht wird in Abhängigkeit von der Zeit t

$$R_0 \int_{t=0}^t (1 + \alpha \vartheta) i^2 dt - c \cdot G \vartheta = 0 . \quad (7)$$

Aus den Gln. (6) und (7) läßt sich durch Umformung die Widerstandserwärmung eliminieren, so daß für den Stromverlauf folgende quasi-lineare Differentialgleichung entsteht:

$$i'' \cdot i - i'^2 - a i' \cdot i^3 = 0 , \quad (8)$$

mit der Abkürzung $a = \frac{\alpha \cdot R_0}{c \cdot G}$.

2. Zeitlicher Verlauf von Strom, Spannung und Temperatur

Die Substitution

$$i' = z ; \quad \frac{dz}{dt} = i'' = z \frac{dz}{di} , \quad (9)$$

erlaubt die Rückführung der nicht linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung,

$$z' - \frac{1}{i} z - a i^2 = 0 . \quad (10)$$

Die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten ergibt für z als Lösung

$$z = i \left(C + a \frac{i^2}{2} \right) , \quad (11)$$

wobei C die Rolle einer noch zu bestimmenden Integrationskonstanten übernimmt. Ersetzt man in Gl. (11) z wieder durch i' , entsprechend Gl. (9), so liegt folgende Integration nahe:

$$\int \frac{1}{i \left(C + \frac{a}{2} i^2 \right)} di = \int dt + t_0 , \quad (12)$$

wobei t_0 die zweite Integrationskonstante der allgemeinen Lösung ist. Mit $A = e^{2 C t_0}$ wird nach Ausführung der Integration

$$\frac{\frac{a}{2} i^2}{\frac{a}{2} i^2 + C} = A \cdot e^{2 C t} . \quad (13)$$

Die Anfangsbedingungen erlauben die beiden Integrationskonstanten zu bestimmen.

Für $t \rightarrow \infty$ muß die gesamte magnetische Energie im Widerstand in Wärme umgesetzt worden sein. Nach Voraussetzung läßt sich daraus die Enderwärmung des Widerstandes angeben. Sie beträgt

$$\vartheta_{\max} = \frac{1}{2} L i_0^2 \frac{1}{c \cdot G}. \quad (14)$$

Der auf seine Endtemperatur erwärmte Widerstand hat nach Gl. (1) die Größe

$$R_{\max} = R_0 (1 + \alpha \vartheta_{\max}). \quad (15)$$

Für $t \rightarrow \infty$ tritt also keine Widerstandsänderung mehr ein, so daß das Abklingen des Stromes in diesem Bereich durch eine e-Funktion mit der Zeitkonstanten $\frac{1}{\gamma} = \frac{L}{R_{\max}}$ beschrieben werden kann.

In Gl. (13) wird also

$$C = -\frac{R_{\max}}{L} = -\gamma. \quad (16)$$

Beim Beginn des Entladungsvorganges zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der vorher durch die Induktivität geflossene Strom $i = i_0$ vorhanden. Die zweite Integrationskonstante A läßt sich hiernach bestimmen zu

$$A = \frac{\frac{a}{2} i_0^2}{\frac{a}{2} i_0^2 - \gamma}. \quad (17)$$

Man führt die Werte aus den Gln. (16) und (17) in die allgemeine Lösung für den Stromverlauf nach Gl. (13) ein und bezeichnet den auf i_0 bezogenen Augenblickswert des Stromes mit

$$y = \frac{i}{i_0}. \quad (18)$$

Ferner berechnet man mit a aus Gl. (8)

$$\frac{2\gamma}{a \cdot i_0^2} = 1 + \frac{1}{\alpha \vartheta_{\max}} = 1 + \beta, \quad (19)$$

wobei $\beta = \frac{1}{\alpha \vartheta_{\max}}$ ist.

Gl. (13) nimmt mit den Abkürzungen (18) und (19) die Form an

$$\frac{y^2 \cdot \beta}{(1 + \beta) - y^2} = e^{-2\gamma t}. \quad (20)$$

Die Auflösung von Gl. (20) nach y ergibt für den gesuchten Stromverlauf

$$y = \sqrt{\frac{1 + \beta}{\beta + e^{-2\gamma t}}} \cdot e^{-\gamma t}. \quad (21)$$

Der Spannungsverlauf an der Induktivität ist der zeitlichen Ableitung des Stromverlaufes proportional. Bezogen auf den Anfangswert der Spannung $u_0 = R_0 \cdot i_0$ kann man den Spannungsverlauf berechnen,

$$x = \frac{u}{u_0} = -\frac{L}{R_0} y'. \quad (22)$$

Die Durchführung der Differentiation führt auf

$$x = \left(\frac{1 + \beta}{\beta + e^{-2\gamma t}} \right)^{3/2} \cdot e^{-\gamma t}. \quad (23)$$

Mit bekannten Werten für den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung folgt aus der Beziehung

$$u = i \cdot R_0 (1 + \alpha \vartheta) \quad (24)$$

für den Temperaturverlauf

$$\vartheta = \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \frac{1}{\alpha}, \quad (25)$$

wobei wieder die relativen Werte eingeführt wurden. Einsetzen von x und y aus den Gln. (21) und (23) ergibt für die auf den Temperaturendwert ϑ_{max} bezogene Erwärmung in Abhängigkeit von der Zeit

$$\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_{max}} = \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{1 + \frac{1}{\beta} e^{-2\gamma t}}. \quad (26)$$

Der zeitliche Verlauf des temperaturabhängigen Widerstandes ist damit ebenfalls bekannt und kann dargestellt werden durch die Gleichung

$$r = \frac{R}{R_0} = \frac{1 + \beta}{\beta + e^{-2\gamma t}}. \quad (27)$$

3. Darstellung von Strom, Spannung und Temperatur für verschiedene Beispiele

Im Bild 5 sind für ein Beispiel die Werte x , y , r und Θ in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen. Zum Vergleich sind auch die x - und y -Werte für einen temperaturunabhängigen Widerstand (Index $R = \text{const}$) eingetragen. Man erkennt, daß man durch die Ausnützung der Widerstandserhöhung durch Erwärmung ein rascheres Abklingen des Entladungsstromes erhält.

In dem dargestellten Beispiel ist

L	$= 2$	Hy	Damit wird:
R_0	$= 0,5$	Ω	$\beta = 2$
i_0	$= 1$	kA	$\gamma = 0,375 \text{ 1/s}$
α	$= 0,0045 \text{ 1/}^\circ\text{C}$		
ϑ_{max}	$= 110$	$^\circ\text{C}$	

Der Entladestrom klingt in diesem Beispiel nach etwa 6,6 Sekunden auf 10% des Anfangswertes ab, während dieser Stromwert bei temperaturunabhängigem Widerstand erst nach 9,2 Sekunden erreicht wird. Die Spannung an der Induktivität bleibt im ersten Augenblick konstant und klingt dann rascher ab, als im Falle $R = \text{const}$. Der Verlauf der Kurve $\Theta = f(t)$ zeigt, daß der Widerstand nach etwa 6,5 Sekunden 99% seiner Endtemperatur erreicht hat. Verändert man den Wert β , so läßt sich zeigen, daß für $\beta < 2$ noch kürzere Entladungszeiten zu erreichen sind. Da hierbei die Spannung ihren Anfangswert übersteigen kann, muß der Ausgangswiderstand entsprechend kleiner gewählt werden, damit die festgelegte Maximalspannung nicht überschritten wird. Im Bild 6 ist ein zweites Beispiel dargestellt mit den Werten:

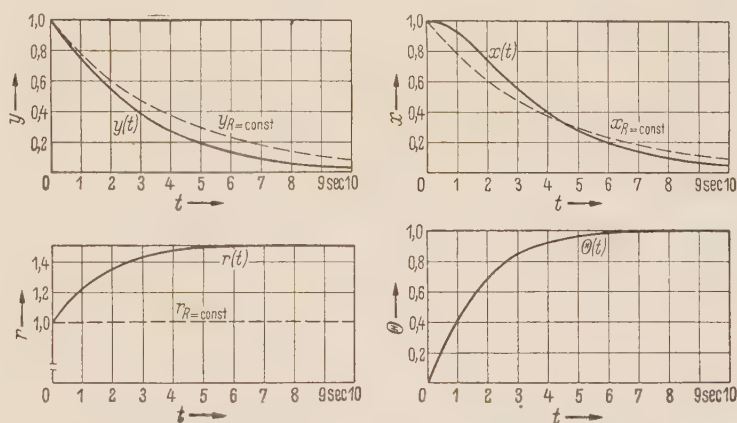


Bild 5. Verlauf der bezogenen Werte für Strom (y), Spannung (x), Widerstand (r), Erwärmung (Θ) in Abhängigkeit von der Zeit für die Annahmen des Beispiels 1.

kann, muß der Ausgangswiderstand entsprechend kleiner gewählt werden, damit die festgelegte Maximalspannung nicht überschritten wird. Im Bild 6 ist ein zweites Beispiel dargestellt mit den Werten:

L	$= 2$	Hy	$\beta = 0,5$
R_0	$= 0,357$	Ω	$\gamma = 0,535 \text{ 1/s}$
i_0	$= 1$	kA	
α	$= 0,0045 \text{ 1/}^\circ\text{C}$		
ϑ_{max}	$= 445$	$^\circ\text{C}$	

Die Kurve $x = f(t)$ zeigt, daß die Spannung an der Induktivität während des Entladevorganges auf etwa 140% ihres Anfangswertes ansteigt. Der Entladestrom ist in noch kürzerer Zeit auf 10% des Anfangswertes abgeklungen als im ersten Beispiel.

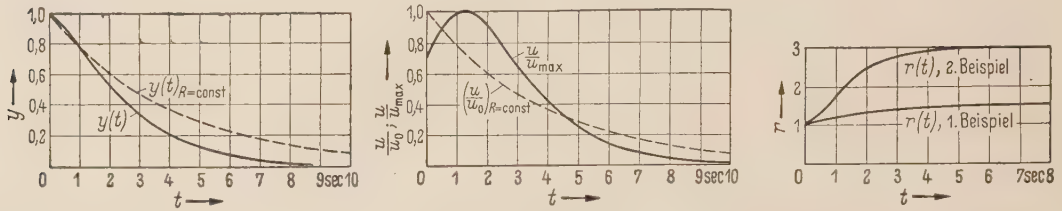


Bild 6. Verlauf der bezogenen Werte für Strom (y), Spannung (x) und Widerstand (r) in Abhängigkeit von der Zeit für die Annahmen des Beispiels 2.

4. Zusammenhang zwischen dem Überspannungsverhältnis und der Entladungszeit

Um zu erkennen, für welches Überspannungsverhältnis x_{\max} die Entladungszeit am kleinsten ist, wird zunächst Gl. (23) nach der Zeit differenziert, man erhält

$$x' = (1 + \beta)^{3/2} \left[\frac{3}{2} (\beta + e^{-2\gamma t})^{-5/2} \cdot 2\gamma e^{-3\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t} (\beta + e^{-2\gamma t})^{-3/2} \right]. \quad (28)$$

Für $x' = 0$ wird

$$e^{-2\gamma t} = \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/2}; \quad (29)$$

dies gilt für $0 \leq \beta \leq 2$.

Führt man $e^{-\gamma t}$ nach Gl. (29) in Gl. (23) ein, so kann das Überspannungsverhältnis in Abhängigkeit von β angegeben werden:

$$x_{\max} = \frac{u_{\max}}{u_0} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(1 + \beta)^{3/2}}{\beta}. \quad (30)$$

Wenn man die Zeit t , nach welcher der Entladungsstrom der Induktivität auf einen bestimmten Prozentsatz des Anfangswertes abgeklungen ist in Abhängigkeit vom Überspannungsverhältnis x_{\max} darstellt und dabei γ so wählt, daß u_{\max} konstant bleibt, findet man, daß für ein bestimmtes Überspannungsverhältnis x_{\max} die Entladungszeit einen Minimalwert besitzt. Für bestimmte Werte von $y = y_a$ und γ kann die Entladungszeit t angegeben werden.

Mit x nach Gl. (23) wird

$$y_a^2 = \frac{1 + \beta}{\beta + e^{-2\gamma t_a}} \cdot e^{-2\gamma t_a}. \quad (31)$$

Daraus entnimmt man nach einiger Umformung die Entladungszeit t_a für einen mit der Temperatur veränderlichen Widerstand in Abhängigkeit von β zu

$$t_a = \frac{x_{\max} \cdot T_0}{2} \cdot \frac{\ln \left(\frac{1 + \beta - y_a^2}{\beta y_a^2} \right)}{1 + 1/\beta}. \quad (32)$$

In Gl. (32) bedeutet T_0 die Zeitkonstante des Kreises bei kaltem Widerstand, während die Multiplikation mit x_{\max} die Verkleinerung des kalten Widerstandes berücksichtigt, die zur Einhaltung der Spannung u_{\max} notwendig ist. Setzt man aus Gl. (23) den Wert für x_{\max} ein, differenziert diesen Ausdruck nach β und setzt ihn 0, so folgt daraus die Gleichung

$$\ln \left(\frac{1 + \beta - y_a^2}{\beta y_a^2} \right) - 2 \frac{1 + \beta}{1 + \beta - y_a^2} \cdot \frac{1 - y_a^2}{\beta} = 0. \quad (33)$$

Näherungsweise ergibt sich für hinreichend kleine Werte von y_a , d. h. für $y_a^2 \ll 1$

$$\frac{\beta}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 + \beta}{\beta y_a^2} \right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1 + \beta}{\beta y_a^2} \right)^{\beta/2} = e. \tag{33a}$$

Voraussetzungsgemäß sind nur solche Lösungen von Gl. (33) und (33a) sinnvoll, deren Betrag zwischen 0 und 2 liegt.

Die zahlenmäßige Auswertung der Gl. (33a) ergibt für kleine y_a -Werte β -Beträge, die kleiner als 1 sind. Mit dieser Kenntnis läßt sich für den Logarithmus in Gl. (33a) eine Reihenentwicklung ansetzen, die bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die transzendente Gleichung in eine quadratische Gleichung zurückführt. Mit der Abkürzung $C_a = -\ln y_a^2$ wird schließlich

$$\beta_0 \approx -\frac{C_a}{2(C_a - 1)} + \sqrt{\left[\frac{C_a}{2(C_a - 1)} \right]^2 + \frac{2}{C_a - 1}}. \tag{34}$$

Wie Gl. (34) erkennen läßt, geht für $y_a \rightarrow 0$ und $C_a \rightarrow \infty$ der Optimalwert von β gegen 0.

Für bekanntes β_0 berechnet man die minimale Abklingzeit bei linear temperaturabhängigem Widerstand zu

$$t_{amin} = T_0 \cdot \frac{2 \sqrt{1 + \beta_0}}{3 \sqrt{3} \cdot \beta_0}. \tag{35}$$

Diese Gleichung liefert sofort den Vergleich zu der theoretisch kleinstmöglichen Abklingzeit T_0 bei stetig veränderlichem ohmschen Widerstand R (nach Abschn. B). T_0 ist jedoch auch die Zeitkonstante des abklingenden Stromes bei erwärmungsunabhängigem Widerstand $R = R_0$. Für diese Voraussetzung bezieht man t_{amin} noch besser auf die dafür bekannte Abklingzeit

$$t_{a0} = -T_0 \cdot \ln y_a. \tag{36}$$

Es wird also

$$\frac{t_{amin}}{t_{a0}} = \frac{1}{-\ln y_a} \cdot \frac{2 \sqrt{1 + \beta_0}}{3 \sqrt{3} \cdot \beta_0}. \tag{37}$$

In Zahlentafel 1 sind einige aus den Gln. (35) und (37) berechnete Werte zusammengestellt, die einen Eindruck über die Größe der bei Anwendung der Widerstandserhöhung durch Erwärmung erzielbaren Gewinne vermitteln. Man entnimmt z. B. der Spalte 5, daß sich gegenüber der Anwendung eines unveränderlichen Widerstandes Verkürzungen der Abklingzeit um etwa 50% erreichen lassen. Bei der Auslegung stark temperaturabhängiger Widerstände ist wie erwähnt, darauf zu achten, daß während des Abklingvorganges die höchst-zulässige Spannung nicht überschritten wird. Die kalten Widerstände sind im Verhältnis $1/x_{max}$ kleiner zu wählen, als dies bei temperaturunabhängigen Widerständen notwendig ist. Die nach Beendigung des Abklingvorganges infolge Erwärmung sich einstellende Widerstandserhöhung ist durch den Wert $1/\beta_0$ in Spalte 6 gegeben und wie ersichtlich für die angeführten Beispiele schon recht beträchtlich; sie liegt aber innerhalb der Grenzen technisch möglicher, wirtschaftlicher Ausführungen.

Zahlentafel 1

y_a	1 $C_a = -\ln y_a^2$	2 β_0	3 x_{max}	4 t_{amin}/T_0	5 t_{amin}/t_{a0}	6 $1/\beta_0 = \alpha \vartheta_{max}$
0,1	4,6	0,343	1,75	1,3	0,565	2,92
0,05	5,98	0,27	2,04	1,6	0,533	3,7
0,01	9,2	0,186	2,67	2,26	0,49	5,38

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß das Optimum der Widerstandsauslegung nur schwach ausgeprägt ist. Hierdurch wird es möglich, auch für Ströme die kleiner als der Höchstwert des Drosselstromes sind, den Abklingvorgang durch einen von der Erwärmung gesteuerten Entladungswiderstand beschleunigen zu lassen. Bei gegebenem Produkt $\alpha \vartheta_{max}$ und dem kalten

Widerstand $R_{0k} = \frac{R_0}{x_{max}}$ kann die Dimensionierung des temperaturabhängigen Entlades-

widerstandes vorgenommen werden. Die Wahl des Temperaturkoeffizienten α des Materials hat so zu erfolgen, daß die Temperaturbeständigkeit des Widerstandsmaterials nicht überschritten wird. Sie hängt also auch von der Konstruktion des Widerstandes und seinen Abkühlverhältnissen ab. Über Gl. (14) kann schließlich die Masse des Widerstandes und zusammen mit R_{0k} der notwendige Querschnitt und die Länge des Widerstandes bestimmt werden.

D. Zusammenfassung

Nach einer Betrachtung der Zusammenhänge bei der Entladung einer Induktivität über einen stetig veränderlichen ohmschen Widerstand werden die Gleichungen für Strom, Spannung und Temperatur bei Verwendung eines temperaturabhängigen ohmschen Widerstandes abgeleitet. Dabei wird die Bedingung eingehalten, daß während des Abklingvorganges eine durch die Isolation der Anordnung gegebene obere Spannungsgrenze nicht überschritten wird.

An Hand einiger Beispiele erkennt man, daß man durch die Ausnützung der Widerstandserhöhung durch Erwärmung ein erheblich rascheres Abklingen des Entladungsstromes erhält als bei Verwendung konstanter, temperaturunabhängiger Widerstände. Zum Schluß wird dann der Zusammenhang zwischen dem Überspannungsverhältnis und der Entladungszeit ermittelt und damit ein Hinweis auf die günstigste Auslegung des Entladungswiderstandes gegeben.

Dr.-Ing. H. WEH, Rheydt/Rhld., Gartenstr. 21

Beitrag zur Berechnung der Erwärmung von Prüftransformatoren

Von

GEORG SENFT, Nürnberg

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 19. Februar 1959)

Übersicht: Unter vereinfachenden Annahmen wird für eine volleingepackte Hochspannungslagenwicklung die Differentialgleichung des Erwärmungsvorganges angegeben, die rein formal einer erweiterten Differentialgleichung für eine Leitung mit Widerstand und Kapazität entspricht. Zur Bestimmung des zeitlichen und örtlichen Temperaturverlaufes geht man daher von den aus der Leitungstheorie bekannten Vierpolgleichungen aus. Die Lösung wird mit Hilfe der Operatorenrechnung durchgeführt. Zum Schluß werden die Gleichungen zur Berechnung des Temperaturverlaufes während der Abkühlzeit und bei wechselnden Belastungen des Prüftransformators angegeben.

A. Einleitung

Die Hochspannungswicklungen von Prüftransformatoren werden heute zumeist als Lagenwicklung ausgeführt. Dabei sind alle einzelnen Lagen entweder aufeinandergewickelt, wobei als Dielektrikum hochwertiges Ölpapier verwendet wird, oder der Wicklungsaufbau wird durch Anordnung von Ölkänen nach jeweils einigen Lagen aufgelockert, je nachdem ob es sich um Prüftransformatoren vorwiegend für Kurzzeit- oder Dauerprüfungen handelt [1], [2].

Wegen dieses Wicklungsaufbaues und der in den Isolationsschichten erzeugten dielektrischen Verluste ist das bekannte übliche Verfahren der Erwärmungsberechnung nicht anwendbar. Im folgenden sollen daher für die an erster Stelle genannte Wicklungsausführung mit voll eingepackten Lagen die notwendigen Überlegungen angestellt und die erforderlichen Gleichungen für die Berechnung der Erwärmung abgeleitet werden.

Um die Rechnung zu vereinfachen und überhaupt noch praktisch ausführbar zu machen, wird die Wicklung als ebenes Problem mit eindimensionaler Wärmeströmung behandelt, d. h. die Krümmung der Wicklung und die Wärmeabgabe an den Stirnseiten werden vernachlässigt. Ferner bleibt die Temperaturabhängigkeit sowohl der Wicklungs- als auch der dielektrischen Verluste unberücksichtigt. Es wird immer mit den Verlustwerten gerechnet, die bei der zulässigen Grenztemperatur auftreten. Dadurch erhält der Transformator, besonders bei Kurzzeitbelastungen, eine gewisse thermische Sicherheit.

Im Rahmen dieser Arbeit soll sich die Untersuchung auf die Ermittlung des Temperaturverlaufes der Hochspannungswicklung über Öl beschränken, da sich die Berechnung der Öl-erwärmung in analoger Weise mit Hilfe eines ähnlichen elektrischen Ersatzschaltbildes durchführen läßt.

B. Berechnung der Wicklungserwärmung

Einen Schnitt durch den Wicklungsaufbau eines solchen Prüftransformators mit Übertragungswicklung zum evtl. Anschluß eines zweiten Transformators in Kaskadenschaltung zeigt Bild 1. Sieht man von der Belastung der Übertragungswicklung ab, wie es beim Betrieb als Einzeltransformator der Fall ist, dann stellen sowohl die Wicklungslagen mit den dazwischenliegenden Papierschichten als auch die auf der Übertragungswicklung aufgebrauchte Isolationsschicht je für sich ein Dielektrikum mit gleichmäßig verteilten Verlusten dar, in dem nach dem Einschalten des Transformators je Volumeneinheit Verluste v erzeugt werden. Die in den Wicklungslagen entstehenden Kupferverluste werden zu den dielektrischen Verlusten hinzugerechnet. Die Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem Medium mit gleichmäßig verteilten Wärmequellen lautet¹

$$\frac{v}{\lambda} = \frac{s \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1)$$

¹ Die Lösung dieser Differentialgleichung für die speziellen Grenzbedingungen, daß an den Begrenzungsflächen des Dielektrikums die Übertemperatur gegen seine Umgebung zu jeder Zeit gleich Null ist, wurde bereits in einer früheren Arbeit angegeben [3].

Darin bedeuten:

- v die räumliche Dichte der Wärmeleistung z. B. in W/m^3 ,
 s die Dichte des Isoliermaterials z. B. in kg/m^3 ,
 c die spezifische Wärme des Isoliermaterials z. B. in W s/kg grad ,
 λ die Wärmeleitfähigkeit des Isoliermaterials z. B. in W/m grad ,
 $\vartheta(x, t)$ die Übertemperatur zur Zeit t an der Stelle x in grad .

Um nun den zeitlichen und örtlichen Temperaturverlauf für die in Isoliermaterial eingepackte Wicklung zu erhalten, muß die Differentialgleichung einmal für den Fall gelöst werden, daß gleichmäßig verteilte Verluste (Wicklungsverluste in den Lagen und dielektrische Verluste

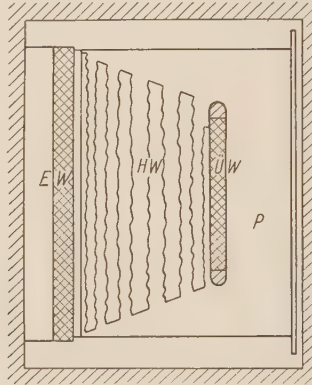


Bild 1. Schnitt durch den Wicklungsaufbau.
 EW Erregerwicklung, HW Hochspannungswicklung, ÜW Übertragungswicklung,
 P außenliegende Isolationsschicht.

zwischen den Lagen) nur in der Hochspannungswicklung (Wicklungslagen und Lagenisolation) selbst erzeugt werden und dann noch für den weiteren Fall, daß Verluste nur in der außenliegenden Papierschicht P auftreten. Die dielektrischen Verluste in der Lagenisolation nehmen wegen der von Null an der Verbindungsstelle zweier Lagen bis zum vollen Wert anwachsenden Spannungsdifferenz ebenfalls von Null bis zu einem Höchstwert zu. Für die Wärmerechnung wurde ein Mittelwert eingesetzt. Die gesuchte Temperaturverteilung in den Lagen der Hochspannungswicklung ergibt sich durch Überlagerung beider Betriebsfälle.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß bei normal üblicher Isolationsbemessung die heißeste Stelle in den allermeisten Fällen nicht in die außenliegende Isolationsschicht zu liegen kommt, so daß man die Bestimmung des Temperaturverlaufes auf die eigentliche Hochspannungswicklung selbst beschränken kann.

Für die genannten Bedingungen läßt sich in einfacher Weise eine Lösung mit Hilfe eines elektrischen Ersatzschaltbildes finden. Setzt man nämlich in Gl. (1) $v = 0$, dann ergibt sich formal dieselbe Differentialgleichung wie für eine Leitung mit Widerstand und Kapazität. Die Lösung sind die aus der Theorie der Leitungen bekannten Vierpolgleichungen, die sich durch Hinzunahme eines Gliedes für den hier vorliegenden Fall, daß $v \neq 0$ ist, erweitern lassen. Bezeichnet man mit \mathfrak{I}_a und U_a Strom und Spannung am Anfang ($x = 0$) bzw. mit \mathfrak{I}_e und U_e am Ende ($x = l$) einer Leitung von der Länge l , dann lauten unter der Voraussetzung eines sinusförmigen Verlaufes von Strom und Spannung im quasistationären Endzustand diese erweiterten Gleichungen

$$U_e = \frac{\mathfrak{I}_v \cdot \beta}{\gamma l} (1 - \coth \gamma l) + U_a \cdot \coth \gamma l + \mathfrak{I}_a \cdot \beta \cdot \sin \gamma l, \quad (2)$$

$$\mathfrak{I}_e = -\frac{\mathfrak{I}_v}{\gamma l} \cdot \sin \gamma l + \mathfrak{I}_a \cdot \coth \gamma l + \frac{U_a}{\beta} \cdot \sin \gamma l, \quad (3)$$

wobei \mathfrak{S}_v die Summe längs der Leitung gleichmäßig verteilter, zusätzlich fließender Ströme ist. Ferner bedeuten

$$\gamma l = \sqrt{j \omega C R}; \quad \gamma x = \gamma l \frac{x}{l} = \sqrt{j \omega C R} \frac{x}{l}; \quad \mathfrak{B} = \sqrt{\frac{R}{j \omega C}} \quad (4)$$

Für die Spannung an einer beliebigen Stelle x der Leitung wird dann

$$u_x = \frac{\mathfrak{S}_v \cdot \mathfrak{B}}{\gamma l} (1 - \mathfrak{Cof} \gamma x) + u_a \cdot \mathfrak{Cof} \gamma x + \mathfrak{S}_a \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{Sin} \gamma x. \quad (5)$$

Zwischen den elektrischen und thermischen Größen gelten nun folgende Analogien:

Die Übertemperatur ϑ in °C entspricht der Spannung u in Volt, der Wärmestrom \mathfrak{W} in Watt entspricht dem elektrischen Strom \mathfrak{S} in Ampere, der Wärmewiderstand R in °C/W entspricht dem ohmschen Widerstand R , die Wärmekapazität C in Ws/°C entspricht der elektrischen Kapazität C .

Das ganze Wicklungsgebilde, bestehend aus Hochspannungswicklung, Übertragungswicklung und außenliegender Papierschicht P (s. Bild 1) wird nun im elektrischen Ersatzschaltbild (Bild 2) durch zwei Leitungen 1 und 2 mit den Längen l_1 und l_2 dargestellt. Durch die Kapazität C_U entsprechend der Wärmespeicherung der Übertragungswicklung mit den dazu ge-

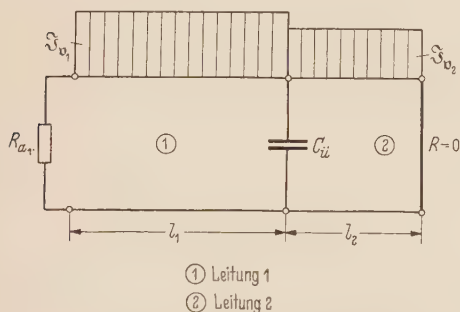


Bild 2. Elektrisches Ersatzschaltbild des Wicklungsaufbaues.

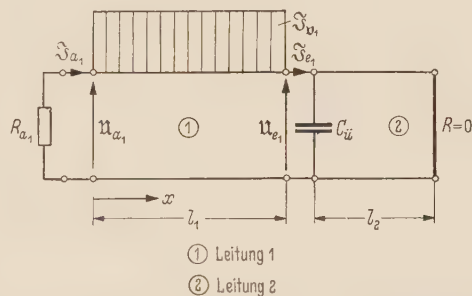


Bild 3. Elektrisches Ersatzschaltbild zur Berechnung der Übertemperatur der Hochspannungswicklung infolge des zusätzlichen Stromes \mathfrak{S}_{v1} .

hörenden Teilen sind die beiden Leitungen gekoppelt. Außerdem ist der Anfang der Leitung 1 mit dem Widerstand R_{a1} abgeschlossen; letzterer ist identisch mit dem Wärmeübergangswiderstand der inneren Mantelfläche der Hochspannungswicklung an Öl. Das Ende der Leitung 2 ist kurzgeschlossen, d. h. der Wärmeübergang an der äußeren Mantelfläche der Papierschicht ist als unendlich gut angenommen. Auf Leitung 1 werden von außen her in gleichmäßiger Verteilung der Gesamtstrom \mathfrak{S}_{v1} und auf Leitung 2 \mathfrak{S}_{v2} eingespeist.

1. Temperaturverlauf in der Hochspannungswicklung, hervorgerufen durch die darin erzeugten Verluste

Zur Bestimmung des Temperaturverlaufs berechnet man die örtliche und zeitliche Spannungsverteilung $u(x, t)$ längs der Leitung 1 für den Fall, daß $\mathfrak{S}_{v1} = 0$ ist. Die hierfür geltenden Randbedingungen ergeben sich nach Bild 3 zu

$$u_{a1} = \mathfrak{S}_{a1} \cdot R_{a1} \quad (6a)$$

Spannung am Anfang der Leitung 1 und

$$u_{e1} = - \mathfrak{S}_{e1} \cdot \mathfrak{R}_{e1} \quad (6b)$$

Spannung am Ende der Leitung 1. Der resultierende Widerstandsoperator \mathfrak{R}_{e1} errechnet sich aus der Beziehung

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{e1}} = j \omega C_U + \frac{1}{\mathfrak{B}_2 \cdot \mathfrak{Sg}(\gamma l)_2}. \quad (7)$$

Durch Einführen der Grenzbedingungen nach den Gln. (6a) und (6b) in die Gln. (2), (3) und (5) und durch Zusammenfassung der so entstandenen Gleichungen erhält man für den Spannungsverlauf längs der Leitung

$$u_x = \frac{\mathfrak{J}_{v_1} \cdot \mathfrak{B}_1}{(\gamma l)_1} \left\{ 1 - \mathfrak{Cof}(\gamma x)_1 - \frac{\left[\frac{1 - \mathfrak{Cof}(\gamma l)_1}{\mathfrak{Cof}(\gamma l)_1} - \frac{\mathfrak{R}_{e_1}}{\mathfrak{B}_1} \mathfrak{Tg}(\gamma l)_1 \right] [R_{a_1} \cdot \mathfrak{Cof}(\gamma x)_1 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Sin}(\gamma x)_1]}{R_{a_1} + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Tg}(\gamma l)_1 + \mathfrak{R}_{e_1} \left[1 + \frac{R_{a_1}}{\mathfrak{B}_1} \cdot \mathfrak{Tg}(\gamma l)_1 \right]} \right\}. \quad (8)$$

Da diese Beziehung nach Voraussetzung für quasistationäre, sinusförmige Spannungen und Ströme gilt, kann man daraus mit Hilfe der Operatorenrechnung den örtlichen und zeitlichen Spannungsverlauf bei plötzlichem Einschalten zur Zeit $t = 0$ ermitteln, indem man an Stelle von $j\omega$ den Operator p setzt.

Die Gl. (4) nehmen dann für die Leitung 1 die Form an:

$$(\gamma l)_1 = \sqrt{p R_1 C_1}; \quad \mathfrak{B}_1 = \sqrt{\frac{R_1}{p C_1}}. \quad (9a)$$

und analog für Leitung 2

$$(\gamma l)_2 = \sqrt{p R_2 C_2}; \quad \mathfrak{B}_2 = \sqrt{\frac{R_2}{p C_2}}. \quad (9b)$$

Nach dem HEAVISIDESCHEN Entwicklungssatz [4] läßt sich dann $u(t)$ als Funktion einer eingepprägten Größe — in unserem Fall ist dies der zusätzliche Gesamtstrom \mathfrak{J}_{v_1} — angeben. Steigt nämlich diese Größe zur Zeit $t = 0$ sprunghaft auf den gleichbleibenden Wert \mathfrak{J}_{v_1} an, dann lautet dafür der Entwicklungssatz

$$u(t) = \mathfrak{J}_{v_1} \left\{ \left[\frac{g(p)}{Z(p)} \right]_{p=0} + \sum_v \frac{e^{p_v t}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{\frac{dz(p)}{dp}} \right]_{p=p_v} \right\}. \quad (10)$$

Zur Berechnung dieses Ausdruckes führt man noch für Leitung 1

$$(\gamma l)_1 = \sqrt{p R_1 C_1} = j\beta \quad (11)$$

ein, so daß sich in Gl. (8) alle hyperpolischen Funktionen durch trigonometrische ersetzen lassen. Durch Auflösen von Gl. (11) nach p wird

$$p = -\frac{\beta^2}{R_1 C_1}. \quad (12)$$

Damit können auch alle übrigen Leitungskonstanten als Funktion von β angeschrieben werden, es ist also

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{R_1}{j\beta} \quad (13)$$

ferner

$$(\gamma l)_2 = j a \beta; \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{R_2}{j a \beta}, \quad (14)$$

wobei zur Abkürzung

$$a = \sqrt{\frac{R_2 \cdot C_2}{R_1 \cdot C_1}} \quad (15)$$

gesetzt ist. Bringt man den Ausdruck in der geschweiften Klammer von Gl. (8) auf einen gemeinsamen Nenner, dann ist, nach Ersatz von $j\omega$ durch p , $g(p)$ der Zähler und $Z(p)$ der Nenner dieses Bruches.

$Z(p) = 0$ ergibt die charakteristische Gleichung zur Berechnung von β_v und damit p_v . Sie lautet nach einigen Umformungen

$$\operatorname{tg} a \beta_v \left\{ \left(\frac{R_{a_1}}{R_1} + \frac{Cv}{C_1} \right) \operatorname{tg} \beta_v + \frac{R_{a_1}}{R_1} \cdot \frac{Cv}{C_1} \beta_v - \frac{1}{\beta_v} \right\} - a \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_v}{\beta_v} = a \frac{R_{a_1}}{R_2}. \quad (16)$$

Unter gleichzeitiger Einführung der Größe β_v wird

$$g(p) = -\frac{R_1^2}{\beta_v^2} \left\{ \left(1 - \cos \beta_v \frac{x}{l_1} \right) \left[\frac{R_{a_1}}{R_1} + \frac{\operatorname{tg} \beta_v}{\beta_v} + \frac{R_2}{R_1} \frac{\operatorname{tg} a \beta_v}{a \beta_v} \left(1 - \frac{R_{a_1}}{R_1} \beta_v \operatorname{tg} \beta_v \right) \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{1 - \cos \beta_v}{\cos \beta_v} + \frac{R_2}{a R_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} a \beta_v}{A} \cdot \operatorname{tg} \beta_v \right] \left[\frac{R_{a_1}}{R_1} \cos \beta_v \frac{x}{l_1} + \frac{\sin \beta_v \cdot \frac{x}{l_1}}{\beta_v} \right] \right\} \quad (17)$$

mit

$$A = 1 - \frac{C_U}{C_2} \cdot a \beta_v \operatorname{tg} a \beta_v. \quad (18)$$

Um $\mathfrak{U}(t)$ nach Gl. (10) auswerten zu können, benötigt man noch den Differentialquotienten

$$\left[\frac{dZ(p)}{dp} \right]_{p=p_v} = \frac{dZ}{d\beta_v} \cdot \frac{d\beta_v}{dp_v}, \quad (19)$$

wobei

$$\frac{dZ}{d\beta_v} = R_1 \left\{ \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\cos^2 a \beta_v} + 2 \frac{C_U \operatorname{tg}^2 a \beta_v - \operatorname{tg} a \beta_v}{C_2 \cdot a \beta_v} + \frac{1}{\beta_v} \left(\frac{1}{\cos^2 \beta_v} - \frac{\operatorname{tg} \beta_v}{\beta_v} \right) \right. \\ \left. - \frac{R_2}{a R_1} \cdot \frac{R_{a_1}}{R_1} \cdot \frac{A \cdot \frac{\operatorname{tg} a \beta_v}{\cos^2 \beta_v} + a \beta_v \frac{C_U}{C_2} \cdot \operatorname{tg}^2 a \beta_v \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_v}{\beta_v} + \frac{a \operatorname{tg} \beta_v}{\cos^2 a \beta_v}}{A^2} \right\} \quad (20)$$

und

$$\frac{d\beta_v}{dp_v} = -\frac{1}{2} \frac{R_1 C_1}{\beta_v}. \quad (21)$$

Berechnet man ferner $\frac{g(p)}{Z(p)}_{p=0}$, dann lautet der Ausdruck für den zeitlichen und örtlichen Verlauf der Spannung $\mathfrak{U}(x, t)$, der unter Berücksichtigung der angegebenen Analogien den Verlauf der Übertemperatur $\vartheta(x, t)$, in der Hochspannungswicklung angibt:

$$\vartheta(x, t) = \mathfrak{B}_{v_1} \left\{ \frac{\left(\frac{R_{a_1}}{R_1} + \frac{x}{l_1} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{R_2}{R_1} \right)}{1 + \frac{R_{a_1}}{R_1} + \frac{R_2}{R_1}} \cdot R_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l_1} \right)^2 \cdot R_1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v t}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{Z(p)} \right]_{p=p_v} \right\}. \quad (22)$$

Die beiden ersten Glieder stellen den stationären Zustand, der Ausdruck unter dem Summenzeichen die zeitlich veränderlichen Glieder dar.

2. Temperaturverlauf in der Hochspannungswicklung, hervorgerufen durch die Verluste in der außenliegenden Papierschicht

Die Berechnung erfolgt in analoger Weise unter Verwendung der Ausgangsgleichungen (2) bis (5). Ein zusätzlich einfließender Strom ist aber nur auf der Leitung 2 vorhanden (\mathfrak{I}_{v_2} in Bild 4). Gegenüber dem im vorhergehenden Abschnitt behandelten Fall wird zweckmäßig für Leitung 1 Anfang mit Ende vertauscht, so daß in Gleichung (5) an die Stelle von x als Koordinate $l_1 - x$ einzusetzen ist bei $\mathfrak{I}_{v_1} = 0$. Infolge dieser Vertauschung ist am Eingang der Leitung 1 die Leitung 2 angeschlossen, die auf der einen Seite mit der Kapazität C_U belastet und auf der anderen Seite kurzgeschlossen ist. Die Gleichung des Widerstandsoperators \mathfrak{R}_{e_2} dieses Leitungsstückes lautet:

$$\mathfrak{R}_{e_2} = \frac{R_{a_1} + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} g(\gamma l_1)}{j \omega C_U \cdot R_{a_1} + \left(j \omega C_U \cdot \mathfrak{I}_1 + \frac{R_{a_1}}{\mathfrak{I}_1} \right) \cdot \mathfrak{I} g(\gamma l_1) + 1}. \quad (23)$$

eine neue Beziehung für den negativen Reziprokwert p der Zeitkonstante mit den Konstanten der Leitung z

$$p = -\frac{(a\beta)^2}{R_2 C_2}. \quad (12a)$$

Durch Abänderung des elektrischen Ersatzschaltbildes ließe sich in ähnlicher Weise auch die zusätzliche Erwärmung der Hochspannungswicklung berechnen, die von der Belastung der Übertragungswicklung im Kaskadenbetrieb herrührt.

C. Temperaturverlauf bei Abkühlung und wechselnder Belastung

1. Abkühlung und Änderung der Belastung

Während der Abkühlung findet innerhalb der Wicklung und im außenliegenden Dielektrikum ein Ausgleichsvorgang statt. Dieser läßt sich im elektrischen Ersatzbild wieder mit Hilfe einer Spannungsverteilung berechnen. Nach einer Arbeit [5], in der die Spannung an den einzelnen Gliedern eines Kettenleiters beim Einspeisen eines Stromes berechnet wird, ergibt sich die Spannung nach dem Aufhören des Stroms, wenn man von diesem Zeitpunkt ab dem bereits bestehenden Zustand einen genau gleichen Strom entgegengesetzten Vorzeichens überlagert. Dadurch wird erreicht, daß während dieser Zeit kein Strom einfließt. Im Fall der Wicklung bedeutet dies, daß man die Temperaturverteilung $\vartheta^*(x, t)$ bei abgeschaltetem Transformator erhält, wenn man zur Zeit des Abschaltens t_1 die Verluste $-\mathfrak{W}_v$ den Verlusten \mathfrak{W}_v hinzufügt. Das konstante Glied fällt dann heraus, und es bleiben nur die mit der Zeit veränderlichen Glieder übrig. Die Gleichung für den Temperaturverlauf nach dem Abschalten lautet also:

$$\vartheta^*(x, t) = \mathfrak{W}_v \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v t} - e^{p_v (t-t_1)}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{dZ} \right]_{p=p_v}. \quad (30)$$

Ändern sich zur Zeit $t = t_1$ die Verluste von \mathfrak{W}_{v_a} in \mathfrak{W}_{v_b} infolge anderer Belastung, dann wird dem Abkühlungsvorgang noch der Temperaturverlauf, herrührend von \mathfrak{W}_{v_b} überlagert. Zu irgendeinem Zeitpunkt t während des Vorhandenseins der Verluste \mathfrak{W}_{v_b} gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta^*(x, t) = & \mathfrak{W}_{v_a} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v t} - e^{p_v (t-t_1)}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{dZ} \right]_{p=p_v} \\ & + \mathfrak{W}_{v_b} \left\{ K_b(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v (t-t_1)}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{dZ} \right]_{p=p_v} \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

wobei $K_b(x)$ das von t unabhängige Glied für die Verluste \mathfrak{W}_{v_b} darstellt.

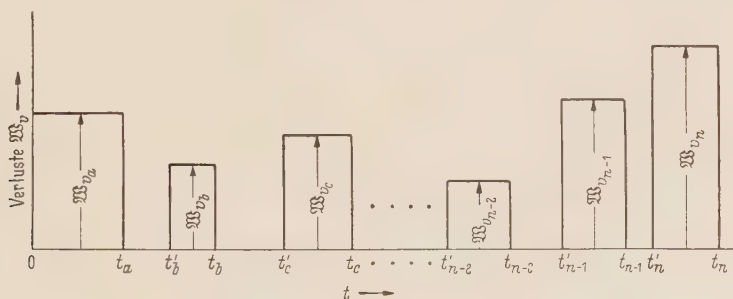


Bild 5. Darstellung eines allgemeinen Belastungsspieles.

2. Wechselnde Belastung mit Zwischenpausen

In ähnlicher Weise lassen sich beliebige Belastungsspiele errechnen. In Bild 5 wechseln Belastungen, deren Höhe durch die Verluste $\mathfrak{W}_{v_a}, \mathfrak{W}_{v_b}, \dots, \mathfrak{W}_{v_n}$ dargestellt ist, mit dazwischen-

liegenden, verschieden langen Pausen ab. Die Übertemperatur $\vartheta^*(x, t)$ nach der n -ten Belastung ergibt sich als Superposition der einzelnen Übertemperaturen nach Gl. (30), die durch die Verluste $\mathfrak{B}_{v_a} \dots \mathfrak{B}_{v_{n-1}}$ verursacht werden sowie des Anteiles der Übertemperatur für die Verluste \mathfrak{B}_{v_n} . Dabei sind für jede Belastung die ihr entsprechenden Verluste mit negativem Vorzeichen vom Zeitpunkt des Aufhörens der Belastung hinzuzufügen, z. B. ist $-\mathfrak{B}_{v_b}$ während der Zeit $t_n - t_b$ zu berücksichtigen. Daraus folgt die Übertemperatur zur Zeit t_n zu:

$$\begin{aligned} \vartheta^*(x, t_n) = & \mathfrak{B}_{v_a} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v t_n} - e^{p_v (t_n - t_a)}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{\frac{dZ}{dp}} \right]_{p=p_v} \\ & + \mathfrak{B}_{v_b} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v (t_n - t'_b)} - e^{p_v (t_n - t_b)}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{\frac{dZ}{dp}} \right]_{p=p_v} + \dots \\ & + \mathfrak{B}_{v_{n-1}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v (t_n - t'_{n-1})} - e^{p_v (t_n - t_{n-1})}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{\frac{dZ}{dp}} \right]_{p=p_v} \\ & + \mathfrak{B}_{v_n} \left\{ K_n(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{p_v (t_n - t'_n)}}{p_v} \left[\frac{g(p)}{\frac{dZ}{dp}} \right]_{p=p_v} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

D. Zahlenbeispiel und Folgerungen aus den Ergebnissen

Für den in der Arbeit von K. HURRE [1] beschriebenen 333 kV-Prüftransformator betragen die zur Auswertung der Gleichungen erforderlichen charakteristischen Werte der Wärmewiderstände und Wärmekapazitäten:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 0,297^\circ \text{C/W} & C_1 = 101,3 \text{ Wh}/^\circ \text{C} \\ R_2 = 0,196^\circ \text{C/W} & C_2 = 96,5 \text{ Wh}/^\circ \text{C} \\ R_{\sigma 1} = 0,08^\circ \text{C/W} & C_U = 23,6 \text{ Wh}/^\circ \text{C} \end{array}$$

Als graphische Lösung der transzendenten Gleichung (16) erhält man die β_v -Werte und daraus unter Verwendung von Gl. (12) die Zeitkonstanten

$$T_1 = 14,7 \text{ Std.}; T_2 = 3,45 \text{ Std.}; T_3 = 1,41 \text{ Std.}; T_4 = 0,86 \text{ Std.}$$

Die Werte T_5 und darüber können vernachlässigt werden.

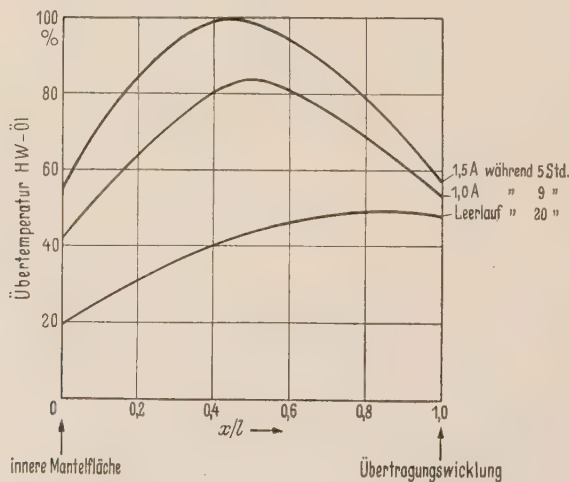


Bild 6. Zeitlicher und örtlicher Verlauf der prozentualen Übertemperatur der Hochspannungswicklung über Öl bei Nennspannung 333 kV.

In Bild 6 ist für den leerlaufenden Transformator ohne Prüfkapazität und für einige Belastungsfälle die Verteilung der prozentualen Übertemperatur über Öl innerhalb der Hochspannungswicklung dargestellt.

Die Werte wurden durch Überlagerung der Erwärmung, herrührend von den Kupferverlusten in der Hochspannungswicklung und den dielektrischen Verlusten in dem Dielektrikum zwischen den Wicklungslagen sowie in der außenliegenden Isolationsschicht errechnet. Die Beispiele sind so gewählt, daß im Leerlauf und bei den angegebenen Belastungen am Ende der genannten Einschaltdauer stets die gleiche, maximal mögliche Temperatur über Eisnull an der heißesten Stelle der Oberspannungswicklung erreicht wird. Sie setzt sich aus Raumtemperatur, Ölerwärmung und Übertemperatur der Wicklung über Öl zusammen.

Im Leerlauf ist nun die prozentuale Wicklungsübertemperatur nur etwa halb so groß wie beim Belastungsstrom von 1,5 Amp. Unter der Voraussetzung gleicher Raumtemperatur und gleicher Temperatur an der heißesten Stelle muß also die Ölerwärmung im Leerlauf entsprechend höher als bei 1,5 Amp. sein. Infolge des sehr kleinen Verhältnisses Belastungszeit/Grundzeitkonstante von $\frac{5}{14,7} = 0,34$ erwärmt sich nämlich das Öl trotz der größeren Gesamtverluste bei Belastung nicht so stark wie im Leerlauf mit der langen Einschaltdauer. Bei einem Prüftransformator mit einem solchen Wicklungsaufbau kann also die Ölerwärmung kein Kriterium für die zulässige Belastbarkeit sein.

Wegen des großen Temperaturgefälles innerhalb der Wicklung ist natürlich der Unterschied zwischen der Temperatur an der heißesten Stelle und der aus der Widerstandszunahme ermittelten im allgemeinen größer als bei Transformatoren üblicher Bauart. Eine auf diese Weise ermittelte Wicklungserwärmung kann auch nicht zur Beurteilung der Belastbarkeit herangezogen werden.

Daher wurden für die Standardtypen der SSW an Hand der abgeleiteten Beziehungen Belastungskurven errechnet [1].

Im Prüffeld des Transformatorenwerkes der SSW wurden an einem 333 kV-Prüftransformator, der eine Übertragungswicklung besitzt, eingehende Erwärmungsmessungen durchgeführt. Die aus der Widerstandszunahme ermittelte Übertemperatur der Übertragungswicklung kann der für die Stelle $\frac{x}{l} = 1$ gerechneten Übertemperatur gleichgesetzt werden.

Zahlentafel

Art der Belastung	Sekundärspannung kV	Belastungsstrom Amp.	Einschaltdauer Std.	Übertemperatur ÜW-Ölmitte	
				gerechnet °C	gemessen °C
Leerlauf	230	—	31	26	24
			47	33	35
Belastung mit 16000 pF	220	1,11	6		
	110	0,56	15	39,5	41
	½ Std. Pause 150	— 0,76	— 7,5	49	44

In der Zahlentafel sind Meß- und Rechenwerte über Ölmitte für Leerlauf und für ein Belastungsspiel zusammengestellt. Angesichts der stark idealisierten Verhältnisse ist die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung recht befriedigend.

Zusammenfassung

Das elektrische Ersatzschaltbild für die Berechnung der Erwärmung einer Lagenwicklung mit festem Dielektrikum zwischen den einzelnen Lagen ist eine Leitung mit Widerstand und Kapazität, wobei die in den Wicklungslagen bzw. in den Isolierschichten erzeugten Verluste durch Ströme dargestellt werden, die kontinuierlich über die Leitung verteilt, zufließen. Die

bekannten Vierpolgleichungen werden für diesen Fall erweitert und mit Hilfe der Operatorenrechnung gelöst. Der Temperaturverlauf während des Abkühlens ergibt sich, wenn man nach dem Ende der Belastung zum bestehenden Belastungszustand noch den entsprechenden negativen überlagert. Für ein beliebiges Belastungsspiel mit Zwischenpausen wird noch die Gleichung zur Berechnung der Übertemperatur aufgestellt. Für einige Belastungsfälle des 333 kV-Prüftransformators der SSW wird der Verlauf der prozentualen Übertemperatur der Hochspannungswicklung über Öl graphisch dargestellt sowie ein Vergleich zwischen Meß- und Rechenwerten gebracht.

Literatur

[1] HURRE, K.: Stand der Entwicklung im Bau von Hochspannungs-Prüftransformatoren. Siemens-Zeitschr. Bd. 28 (1954) S. 256—263. — [2] ALLMENDINGER, K.: Prüftransformatoren und Stoßgeneratoren für Höchstspannung. AEG-Mitt. Bd. 42 (1952) S. 73—76. — [3] ELSNER, R.: Der Temperaturanstieg durch dielektrische Verluste in dicken Isolierschichten. Wiss. Veröffentl. aus den Siemens-Werken Bd. 20 (1942) S. 298. — [4] WAGNER, K. W.: Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik, S. 72 u. f. Leipzig: Joh. A. Barth 1940. — [5] ELSNER, R.: Die Erzeugung sehr hoher Gleichspannungsstöße mit der MARXschen Vervielfachungsschaltung. Arch. Elektrotechn. Bd. 29 (1935) S. 655—682.

Dipl.-Ing. GEORG SENFT in Fa. Siemens-Schuckertwerke AG,
Transformatorenwerk, Nürnberg.

Über den vom magnetischen Feld eines geraden Leiters herrührenden Fluß durch eine beliebige Fläche

Von

HANNS-HEINZ WOLFF, Matawan, New Jersey, USA.

Mit 16 Textabbildungen

(Eingegangen am 17. November 1958)

Übersicht. Es wird der vom magnetischen Feld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters herrührende magnetische Fluß durch begrenzte Flächen, insbesondere Mehrecke, die parallel zum Leiter liegen, ermittelt. Der Fluß wird in Abhängigkeit von verschiedenen Variablen ermittelt. Ferner werden Gleichungen für Sonderfälle gegeben. Die in den sich ergebenden Formeln auftretenden Summandenfaktoren werden durch Kurven für verschiedene Parameter dargestellt.

A. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird der magnetische Fluß durch begrenzte Flächen ermittelt, der von dem magnetischen Feld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters erzeugt wird. Die Berechnung soll im einzelnen durchgeführt werden für drei- und mehreckige ebene Flächen, die parallel zu dem Leiter liegen. Ferner sollen die in einer die Fläche umrandenden Schleife induzierten Spannungen ermittelt werden.

Wir setzen im folgenden voraus, daß der Durchmesser des Leiters vernachlässigbar klein gegen die sonstigen Dimensionen der Anordnung, insbesondere gegen den kleinsten Abstand zwischen der begrenzten Fläche und dem Leiter ist. Es wird ferner vorausgesetzt, daß der Abstand des Rückleiters groß gegen die Abmessungen der Anordnung ist, ferner, daß sich der Leiter in beiden Richtungen auf weite Entfernung von der betrachteten Anordnung aus als gerader Leiter erstreckt, so daß das vom Leiter hervorgerufene magnetische Feld zirkular und in allen Ebenen, die senkrecht zur Leiterachse stehen, gleich ist.

Es soll ferner angenommen werden, daß die Permeabilität des Mediums konstant und über den ganzen Raum gleich und ferner, daß die räumliche Ausdehnung der Fläche in jeder Richtung klein gegen die Wellenlänge des verwendeten Stromes ist.

B. Der magnetische Fluß

Der Vektor der magnetischen Feldstärke \mathfrak{H} liegt in unserer Anordnung senkrecht zum Leiter und sein Absolutwert $|\mathfrak{H}|$, den wir im folgenden kurz „magnetische Feldstärke“ nennen wollen, ergibt sich daher aus der ersten MAXWELLSchen Gleichung zu

$$|\mathfrak{H}| = \frac{I}{2\pi r}, \quad (1)$$

wobei I den Strom des Leiters und r den Abstand des Aufpunktes von der Mittelachse des Leiters bezeichnet. Der magnetische Fluß Φ durch eine Fläche \mathfrak{F} , deren Element wir mit $d\mathfrak{f}$ bezeichnen wollen, ist

$$\Phi = \int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B} d\mathfrak{f} = \mu \mu_0 \int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{H} d\mathfrak{f}. \quad (2)$$

Hierin bezeichnet μ die Permeabilitätszahl und μ_0 die Induktionskonstante.

Projizieren wir nun die Fläche \mathfrak{F} durch Zirkularprojektion um die Leiterachse auf eine Ebene, die parallel zum Leiter liegt, und bezeichnen wir die (ebene) Projektion der Fläche \mathfrak{F} mit F , die in der Richtung der Leiterachse gemessene, dem Radius r zugeordnete Höhe der Fläche F mit l , mit $d\mathfrak{f}$ ein Element der Fläche F und mit α den Winkel, den das Lot dieses Flächenelements mit der Senkrechten auf seinem Radiusstrahl oder kurz die Ebene des Flächenelements mit seinem Radiusstrahl bildet, ferner den Radius des vom Leiter entfer-

testen Flächenelementes mit r_a (äußerer Radius), den den größten Zentriwinkel mit r_a bilden — den Radius der Flächenbegrenzung mit r_i (innerer Radius) — es ist also stets $r_a \geq r_i$ —, dann erhalten wir für den magnetischen Fluß Φ unter Einsetzen der Gl. (1)

$$\Phi = \mu \mu_0 \int_F |\vec{H}| \cos \alpha \, df = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} I \int_F \frac{1}{r} \cos \alpha \, df = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} I \int_{r=r_i}^{r=r_a} \frac{l}{r} \, dr. \quad (3)$$

Wenn auch in den Fällen, in denen zunächst eine Zirkularprojektion durchzuführen ist, als Projektionsebene zweckmäßig eine Achsenebene gewählt wird, so wollen wir doch im Hinblick auf die praktische Bedeutung des magnetischen Flusses durch Flächen, die in Ebenen, die zwar parallel zur Achse liegen, aber keine Achsenebenen sind, im folgenden diesen allgemeinen Fall behandeln.

Wir wollen uns nun der Berechnung des Flusses durch eine vieleckige, zum Leiter parallele Fläche F zuwenden. Ein jedes solches Vieleck können wir durch parallel zum Leiter geführte Schnitte in Dreiecke und Trapeze zerlegen, wobei also stets eine Seite der Dreiecke bzw. zwei Seiten der Trapeze parallel zum Leiter verlaufen. Da ein solches Dreieck lediglich den Sonderfall eines Trapezes darstellt, bei dem eine der beiden parallelen Seiten gleich Null wird, können wir uns auf die Berechnung des Flusses durch ein Trapez beschränken und wollen daher nur die Berechnung für diesen allgemeinen Fall durchführen.

Zur Lösung des in der Gl. (3) auftretenden Integrals betrachten wir Bild 1. Hier ist die Aufsicht der Anordnung in Richtung der Leiterachse dargestellt. M bezeichnet den Mittelpunkt der Leiterachse, A und C die Durchstoßpunkte

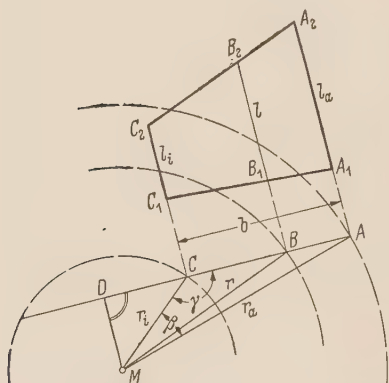


Bild 1. Die Problemstellung für $90^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$.

der dem Leiter parallelen Begrenzungsstrecken des Trapezes bzw. ihrer Verlängerungen durch eine senkrecht zur Leiterachse gelegte Ebene. Der $\angle CMA$ sei mit β , $\angle ACM$ mit γ bezeichnet. B bezeichnet den dem Radius r zugeordneten Punkt der Strecke \overline{AC} , D den Fußpunkt des Lotes von M auf die Gerade durch die Punkte A und C . Unseren obigen Definitionen entsprechend ist dann $\overline{MA} = r_a$, $\overline{MB} = r$ und $\overline{CM} = r_i$.

In Bild 1 ist ferner das Trapez $A_1C_1C_2A_2$, dessen Fluß wir berechnen wollen, um 90° geklappt dargestellt. Die Begrenzungsstrecke $\overline{A_1A_2}$ ist mit l_a , die Begrenzungsstrecke $\overline{C_1C_2}$ mit l_i und schließlich die Strecke \overline{AC} , d. i. die Höhe des Trapezes, mit b bezeichnet.

Sind die Werte von r_i , r_a und β gegeben, so erhalten wir den Winkel γ mit Hilfe einfacher trigonometrischer Überlegungen aus

$$\sin \gamma = \frac{r_a}{b} \sin \beta = \frac{r_a}{\sqrt{r_i^2 + r_a^2 - 2 r_i r_a \cos \beta}} \sin \beta. \quad (4)$$

Wir wollen bei der weiteren Berechnung zunächst davon ausgehen, daß l_i , l_a , r_i , r_a und γ gegeben sind.

a) Gegeben: l_i , l_a , r_i , r_a und γ

Die Länge der Strecke \overline{CB} ergibt sich zu

$$\left. \begin{aligned} \overline{CB} &= \overline{DB} - \overline{DC} \\ &= \sqrt{r^2 - r_i^2 \sin^2 (180^\circ - \gamma)} - r_i \cos (180^\circ - \gamma) \\ &= \sqrt{r^2 - r_i^2 \sin^2 \gamma} + r_i \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und ebenso folgt

$$b = \overline{AC} = \sqrt{r_a^2 - r_i^2 \sin^2 \gamma} + r_i \cos \gamma. \quad (6)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir

$$S = \frac{l_a - l_i}{b} = \frac{l_a - l_i}{\sqrt{r_a^2 - r_i^2 \sin^2 \gamma} + r_i \cos \gamma} \quad (7)$$

ein. Für $l_a > l_i$ ist S positiv, für $l_a < l_i$ negativ.

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich den Fall, in dem der den Punkten der Strecke \overline{AC} zugeordnete Radius r von C nach A fortschreitend fortgesetzt wächst, bei dem also $90^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ ist, und denjenigen, bei dem der den Punkten der Strecke \overline{AC} zugeordnete Radius r von C nach A fortschreitend, mit r_i beginnend zunächst abfällt, um dann wieder über r_i bis r_a anzusteigen, bei dem also $0^\circ \leq \gamma < 90^\circ$ ist.

1. Fall $90^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$.

Mit Hilfe der Gl. (5) und (7) ergibt sich die dem Radius r zugeordnete zu $\overline{C_1 C_2}$ parallele Strecke $\overline{B_1 B_2} = l$ zu

$$l = l_i + S \cdot \overline{CB} = l_i + r_i \cos \gamma \cdot S + S \sqrt{r^2 - r_i^2 \sin^2 \gamma} \quad (8)$$

und wir erhalten hiermit

$$\int_{r=r_i}^{r=r_a} \frac{l}{r} dr = (l_i + r_i \cos \gamma \cdot S) \ln \frac{r_a}{r_i} + S \int_{r=r_i}^{r=r_a} \frac{\sqrt{r^2 - r_i^2 \sin^2 \gamma}}{r} dr. \quad (9)$$

Nun folgt mit Hilfe der Substitution $r = r_i \sin \gamma \csc u$, daher $dr = r_i \sin \gamma \csc u du$,

$$\begin{aligned} \int_{r=r_i}^{r=r_a} \frac{\sqrt{r^2 - r_i^2 \sin^2 \gamma}}{r} dr &= \int_{r=r_i}^{r=r_a} \frac{\sqrt{r_i^2 \sin^2 \gamma (\csc^2 u - 1)}}{r_i \sin \gamma \csc u} r_i \sin \gamma \csc u du = r_i \sin \gamma \int_{r=r_i}^{r=r_a} \frac{\csc^2 u - 1}{\csc u} du \\ &= b - r_i \sin \gamma \left(\arccos \frac{r_i \sin \gamma}{r_a} - \gamma + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

wobei hier und in den folgenden Gleichungen

$$0 < \arccos \frac{r_i \sin \gamma}{r_a} \leq \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

ist.

Nun ergibt sich aus der Gl. (7)

$$r_i \cos \gamma \cdot S = \frac{l_a - l_i}{1 + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1}} \quad (12)$$

und ebenso

$$r_i \sin \gamma \cdot S = \frac{l_a - l_i}{\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1} + \operatorname{ctg} \gamma}. \quad (13)$$

Damit folgt der magnetische Fluß Φ durch Einsetzen der Gl. (7), (9), (13), (15) und (16) in Gl. (4) zu

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} \left\{ \left(l_i + \frac{l_a - l_i}{1 + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1}} \right) \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_a - l_i}{\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1} + \operatorname{ctg} \gamma} \left(\arccos \frac{r_i \sin \gamma}{r_a} - \gamma + \frac{\pi}{2} \right) \right\} I. \end{aligned} \quad (14)$$

Für $\gamma = 180^\circ$ entsprechend $\beta = 0^\circ$, geht Gl. (14) über in

$$\Phi_{\gamma=180^\circ} = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} \left\{ \left(l_i + \frac{l_a - l_i}{1 - \frac{r_a}{r_i}} \right) \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i \right\} I = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} \left\{ \frac{l_i r_a - l_a r_i}{r_a - r_i} \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i \right\} I \quad (15)$$

Für den magnetischen Fluß durch das Trapez $C_1D_1D_2C_2$ erhalten wir, wenn wir als untere Grenze den Radius r_m nehmen,

$$\begin{aligned}\Phi_{C_1D_1D_2C_2} &= \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \left\{ l_m \ln \frac{r_i}{r_m} + (l_i - l_m) \left(1 - \frac{\arccos \frac{r_m}{r_i}}{\sqrt{\frac{r_i^2}{r_m^2} - 1}} \right) \right\} I \\ &= \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \left\{ (l_i + S r_i \cos \gamma) \ln \frac{1}{\sin \gamma} - S r_i \cos \gamma \left(1 - \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \gamma} - 1}} \right) \right\} I\end{aligned}\quad (20)$$

und schließlich ergibt sich der magnetische Gesamtfluß durch das Trapez $A_1C_1C_2A_2$ als Differenz der beiden so errechneten Teilflüsse aus den Gl. (19) und (20) zu

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \left\{ \left(l_i + \frac{l_a - l_i}{1 + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1}} \right) \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_a - l_i}{\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1} + \operatorname{ctg} \gamma} \left(\arccos \frac{r_i \sin \gamma}{r_a} - \gamma + \frac{\pi}{2} \right) \right\} I.\end{aligned}\quad (21)$$

Ein Vergleich mit der Gl. (14) zeigt, daß beide Beziehungen übereinstimmen. Sie gelten also für den ganzen Bereich $0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$.

Aus den Gl. (14) und (21) ist zu ersehen, daß der Fluß Φ nur von dem Verhältnis r_a/r_i nicht aber von der absoluten Größe der Radien abhängt. Wie die Gl. (14) und (21) erkennen lassen, treten hier die Länge l_i und die Differenz $l_a - l_i$ als Faktoren auf. Der l_i allein als Faktor enthaltende Summand stellt den Fluß durch ein Parallelogramm dar, welches durch l_i und eine der beiden angrenzenden Seiten des Trapezes bestimmt ist (vgl. Gl. (23)), während die restlichen den Faktor $l_a - l_i$ enthaltenden Summanden den Fluß durch das nach Ausschnitt des Parallelogramms aus dem Trapez verbleibende Dreieck bestimmen. Wie man aus der Gl. (21) ferner ersieht, enthält die Formel für den Fluß durch dieses Dreieck einen logarithmischen Summanden und einen Summanden, der eine arcus-Funktion enthält.

Für den Sonderfall $\gamma = 0^\circ$ geht die Gl. (21) in

$$\Phi_{\gamma=0^\circ} = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \left\{ \left(l_i + \frac{l_a - l_i}{1 + \frac{r_a}{r_i}} \right) \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i \right\} I = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{l_i r_a + l_a r_i}{r_a + r_i} \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i \right\} I.\quad (22)$$

über.

Wir erhalten ferner für den Sonderfall $l_a = l_i = l$ aus den Gl. (14) bzw. (21)

$$\Phi_{l_a=l_i=l} = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} l \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot I.\quad (23)$$

Wie zu erwarten, ist hier der magnetische Fluß unabhängig von γ .

Ein weiterer Sonderfall ergibt sich, wenn $r_a = r_i = r$, d. h. $\gamma = \frac{180^\circ - \beta}{2}$ wird. Wir erhalten hierfür aus der Gl. (21) den magnetischen Fluß

$$\Phi_{r_a=r_i=r} = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} (l_a - l_i) \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \operatorname{tg} \gamma \right] I.\quad (24)$$

In der Gl. (24) kommt der Radius r nicht vor, da das Verhältnis r_a/r_i , welches allein auftreten könnte (vgl. Bemerkung zu Gl. (21)), voraussetzungsgemäß festgelegt ist. Der magnetische Fluß ist in diesem Fall ferner unabhängig von der absoluten Größe von l_i . Dies ist dadurch begründet, daß der Gesamtfluß durch das Parallelogramm, welches durch l_i und eine der Strecken $A_1\bar{C}_1$ bzw. $A_2\bar{C}_2$ (s. Bild 2) bestimmt wird, hier gleich Null ist, der Fluß also lediglich dem durch das verbleibende Dreieck mit der Seite $l_a - l_i$ entspricht.

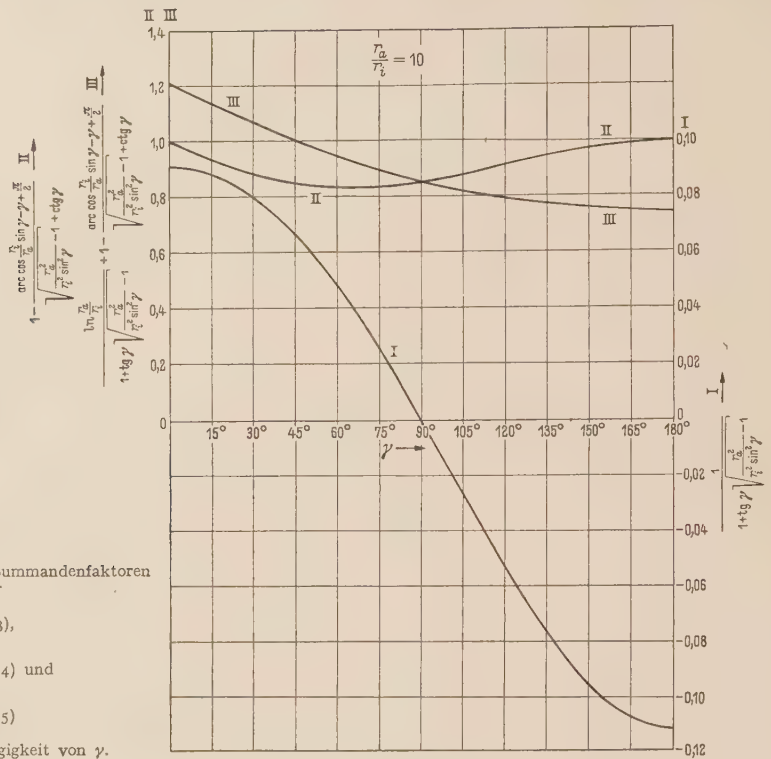


Bild 3 bis 5. Die Funktionen der Summandenfaktoren der Gl. (21) für

 $\frac{r_a}{r_i} = 10$ (Bild 3), $\frac{r_a}{r_i} = 5,0$ (Bild 4) und $\frac{r_a}{r_i} = 2,0$ (Bild 5)in Abhängigkeit von γ .

Bild 3.

Um einen zahlenmäßigen Überblick über die Abhängigkeit des Flusses vom Winkel γ zu erhalten, sind die Summandenfaktoren der rechten Seite der Gl. (21) für verschiedene Verhältnisse von r_a/r_i in den Bildern 3 bis 5 dargestellt, und zwar bezeichnet (I) die Funktion

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1}},$$

also den zur Differenz $l_a - l_i$ als Faktor hinzutretenden Faktor des logarithmischen Gliedes, (II) die Funktion

$$1 - \frac{\operatorname{arc} \cos \left(\frac{r_i}{r_a} \sin \gamma \right) - \gamma + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1 + \operatorname{ctg} \gamma}},$$

d. h. den zweiten, zur Differenz $l_a - l_i$ als Faktor hinzutretenden Faktor des die arcus-Funktion enthaltenden Gliedes, und schließlich (III) die Funktion

$$\frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{1 + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1}} + 1 - \frac{\operatorname{arc} \cos \left(\frac{r_i}{r_a} \sin \gamma \right) - \gamma + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1 + \operatorname{ctg} \gamma}},$$

welche die gesamte Funktion für die Abhängigkeit des magnetischen Flusses von den Radien r_a und r_i und dem Winkel γ durch das Dreieck darstellt, welches nach Abzug des aus der Seite l_i und einer der angrenzenden Trapezseiten bestimmten Parallelogramms vom Trapez verbleibt.

Der Fall $r_a/r_i = 1$ (vgl. Gl. (24)) ist im Bild 6 behandelt, das die Funktion

$$1 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \operatorname{tg} \gamma$$

wiedergibt.

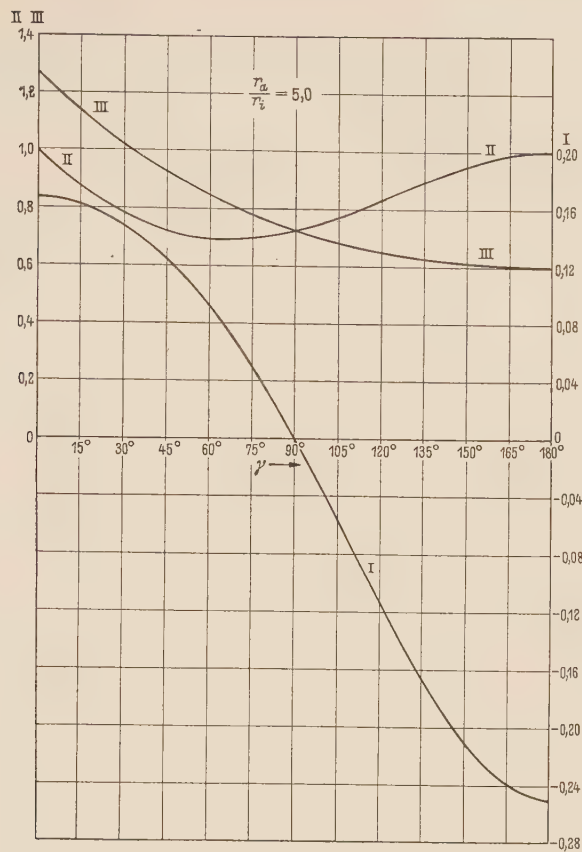


Bild 4.

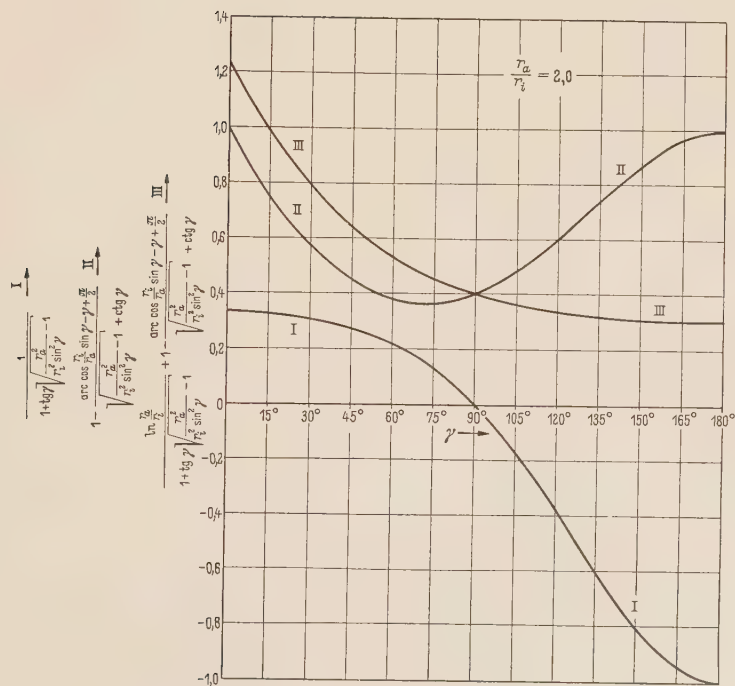


Bild 5.

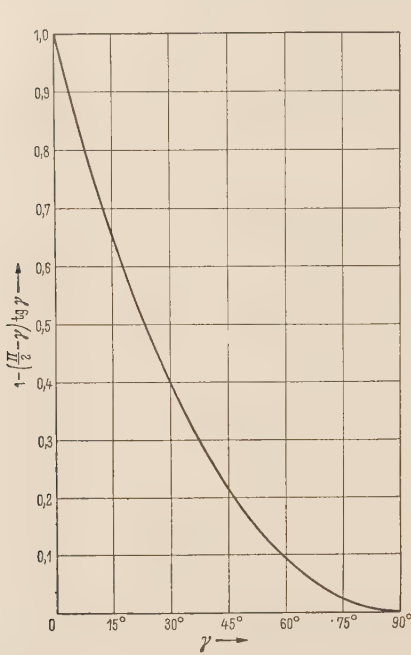


Bild 6.

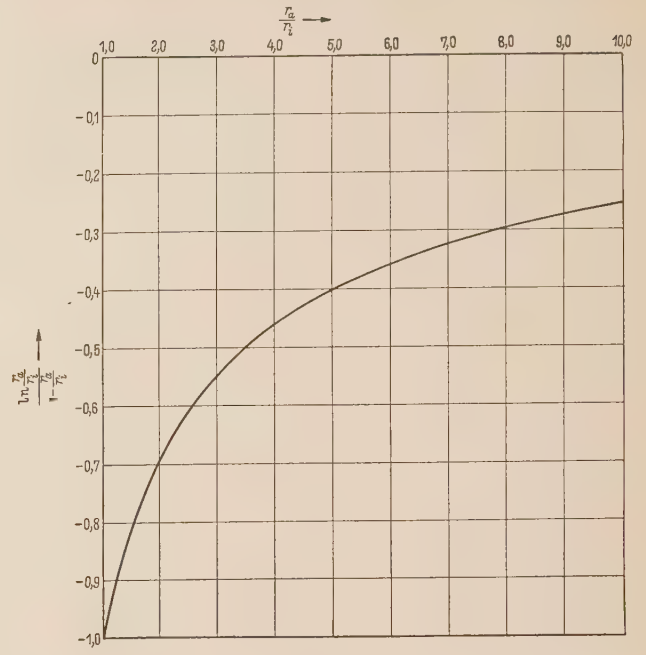


Bild 7.

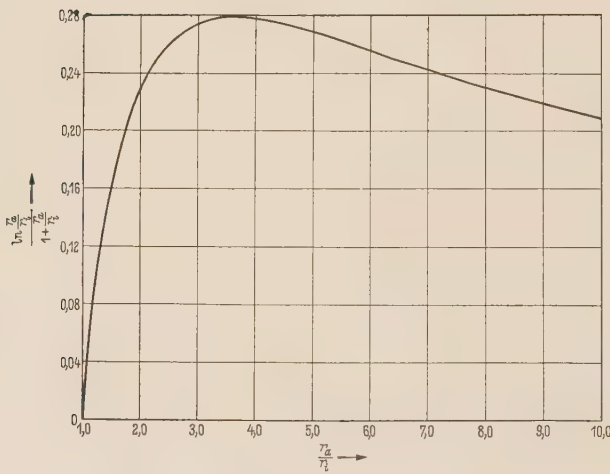


Bild 8.

Bild 6. Die Funktion $1 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \operatorname{tg} \gamma$ in Abhängigkeit von γ .

Bild 7. Die Funktion $\ln \frac{r_a}{r_i} / \left(1 - \frac{r_a}{r_i}\right)$ in Abhängigkeit von γ .

Bild 8. Die Funktion $\ln \frac{r_a}{r_i} / \left(1 + \frac{r_a}{r_i}\right)$ in Abhängigkeit von γ .

Für den Sonderfall $\gamma = 180^\circ$ (vgl. Gl. (15)) ist die Funktion

$$\frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{1 - \frac{r_a}{r_i}}$$

in Abhängigkeit von r_a/r_i in Bild 7 dargestellt. Schließlich zeigt Bild 8 die Funktion

$$\frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{1 + \frac{r_a}{r_i}}$$

in Abhängigkeit von r_a/r_i zur schnelleren Ermittlung des Flusses für den Sonderfall $\gamma = 0^\circ$ (vgl. Gl. (22)).

b) Gegeben: l_i, l_a, r_i, b und γ

Da vielfach die Größe b an Stelle des äußeren Radius r_a fest vorgegeben ist, wollen wir im folgenden in den oben abgeleiteten Gleichungen die Variable r_a durch b ersetzen.

Aus der Gl. (6) ergibt sich

$$r_a = \sqrt{(b - r_i \cos \gamma)^2 + r_i^2 \sin^2 \gamma} = \sqrt{b^2 - 2 b r_i \cos \gamma + r_i^2}, \quad (25)$$

aus Gl. (25)

$$\frac{r_a}{r_i} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2} - 2 \frac{b}{r_i} \cos \gamma} \quad (26)$$

und

$$\frac{r_a}{r_i \sin \gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{r_i \sin \gamma} - \operatorname{ctg} \gamma \right)^2} \quad (27)$$

und schließlich aus Gl. (27)

$$\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1} = \frac{b}{r_i \sin \gamma} - \operatorname{ctg} \gamma. \quad (28)$$

Durch Einsetzen der Gl. (26), (27) und (28) in Gl. (14) bzw. (29) ergibt sich der magnetische Fluß

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} & \left\{ \left[l_i + \frac{r_i}{b} \cos \gamma \cdot (l_a - l_i) \ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2} - 2 \frac{b}{r_i} \cos \gamma + l_a - l_i} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r_i}{b} \sin \gamma \cdot (l_a - l_i) \left(\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{r_i \sin \gamma} - \operatorname{ctg} \gamma \right)^2}} - \gamma + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} I. \quad (29) \end{aligned}$$

Da stets $r_a \geq r_i$, also entsprechend Gl. (26) $1 + \frac{b^2}{r_i^2} - 2 \frac{b}{r_i} \cos \gamma \geq 1$ sein muß, gilt Gl. (29)

nur für $\cos \gamma \leq \frac{1}{2} \frac{b}{r_i}$, also $\operatorname{arc} \cos \frac{1}{2} \frac{b}{r_i} \leq \gamma \leq 180^\circ$. Die gleiche Einschränkung gilt natürlich auch für die folgenden aus Gl. (29) abgeleiteten Gl. (30) bis (33).

Aus der Gl. (29) folgt für $\gamma = 180^\circ$

$$\Phi_{\gamma=180^\circ} = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} \left\{ \left[l_i - \frac{r_i}{b} (l_a - l_i) \ln \left(1 + \frac{b}{r_i} \right) + l_a - l_i \right] \right\} I, \quad (30)$$

für $\gamma = 90^\circ$

$$\Phi_{\gamma=90^\circ} = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} \left\{ l_i \ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2}} + (l_a - l_i) \left[1 - \frac{r_i}{b} \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2}}} \right] \right\} I \quad (31)$$

und für $\gamma = 0^\circ$

$$\Phi_{\gamma=0^\circ} = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} \left\{ \left[l_i + \frac{r_i}{b} (l_a - l_i) \right] \ln \left(\frac{b}{r_i} - 1 \right) + l_a - l_i \right\} I \quad (32)$$

[beachte die einschränkende Bemerkung hinter Gl. (29), wonach Gl. (32) nur für $b \geq 2 r_i$ gilt].

An die Stelle der Gl. (23) tritt für den Sonderfall $l_a = l_i = l$

$$\Phi_{l_a=l_i=l} = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} l \ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2} - 2 \frac{b}{r_i} \cos \gamma} I. \quad (33)$$

Die verschiedenen Summandenfaktoren der Gl. (29) sind zur leichteren zahlenmäßigen Auswertung der Gleichung in den Bildern 9 bis 16 für verschiedene Werte von b/r_i in Abhängigkeit vom Winkel γ dargestellt, und zwar bezeichnet (I) die Funktion

$$\ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2} - 2 \frac{b}{r_i} \cos \gamma},$$

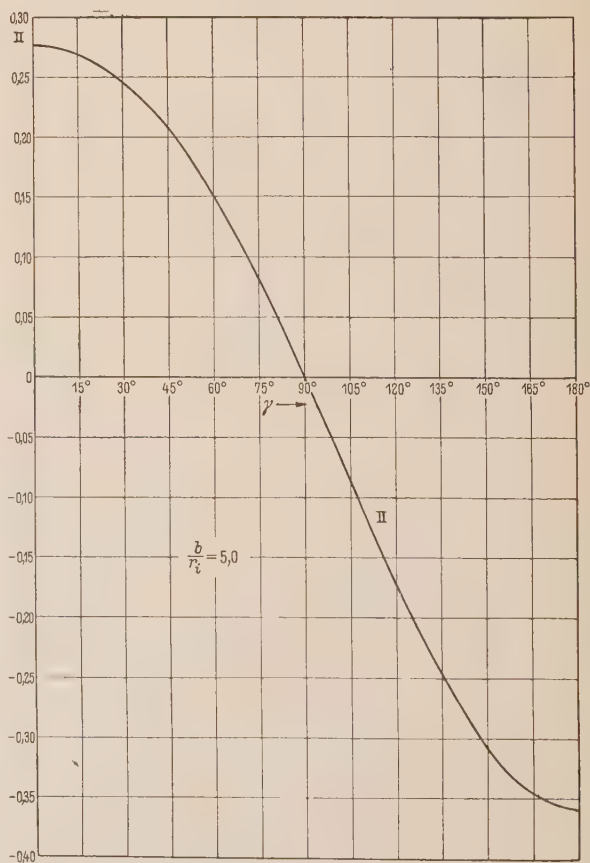
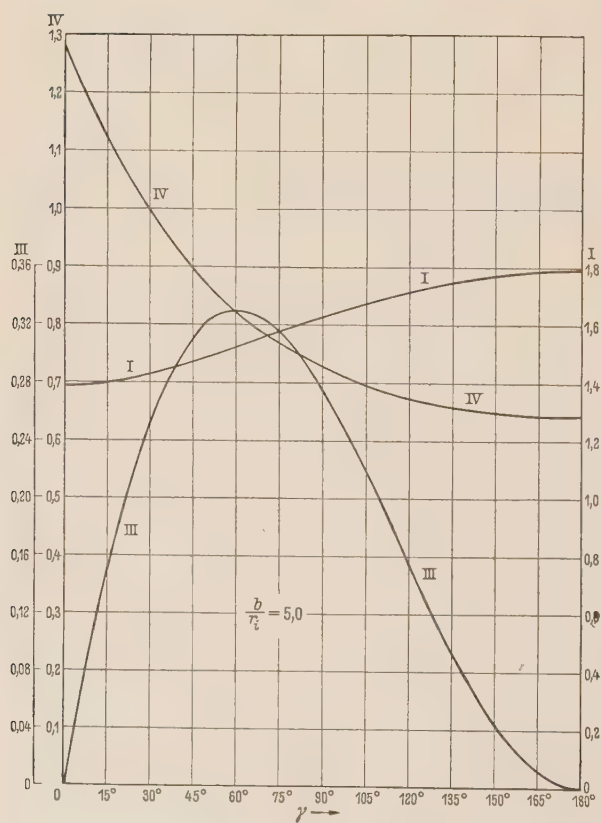
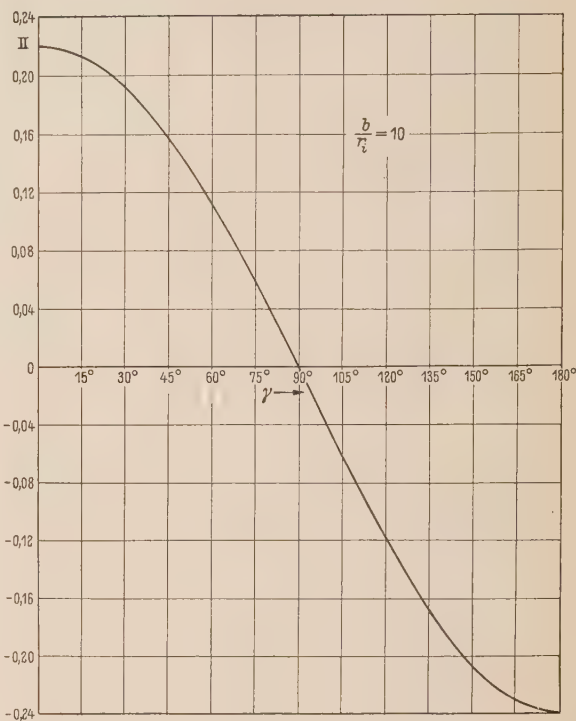
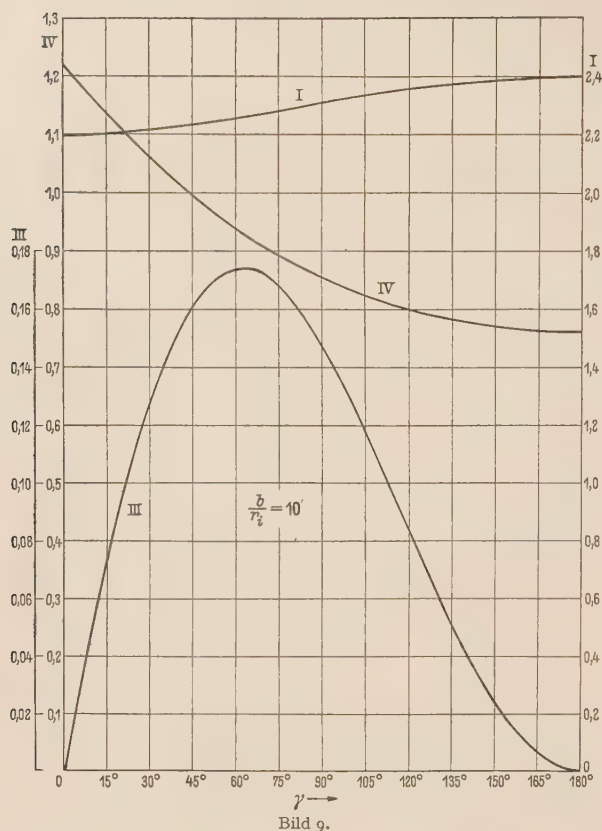


Bild 9 bis 16. Die Funktionen der Summandenfaktoren der Gl. (29) für $b/r_s = 10$ (Bild 9 und 10), $b/r_s = 5,0$ (Bild 11 und 12), $b/r_s = 2,0$ (Bild 13 und 14), $b/r_s = 1,0$ (Bild 15) und $b/r_s = 0,5$ (Bild 16) in Abhängigkeit von γ .

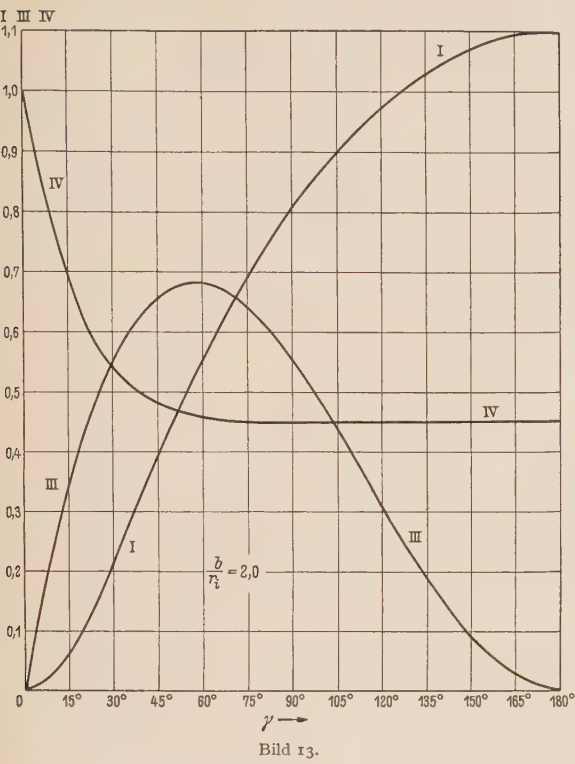


Bild 13.

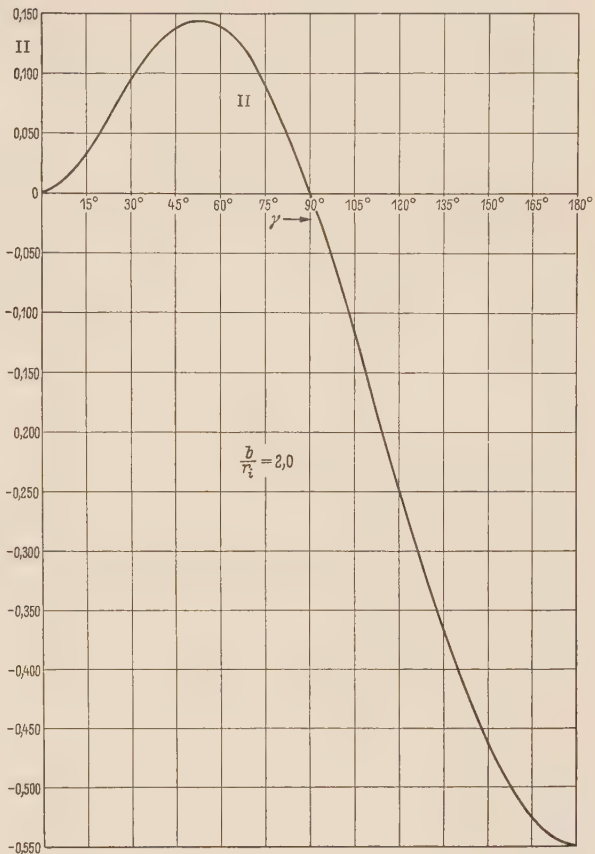


Bild 14.

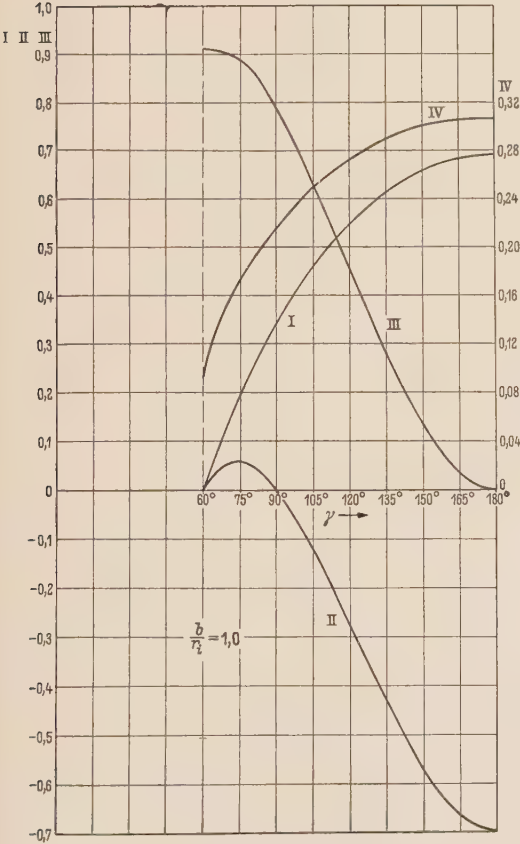


Bild 15.

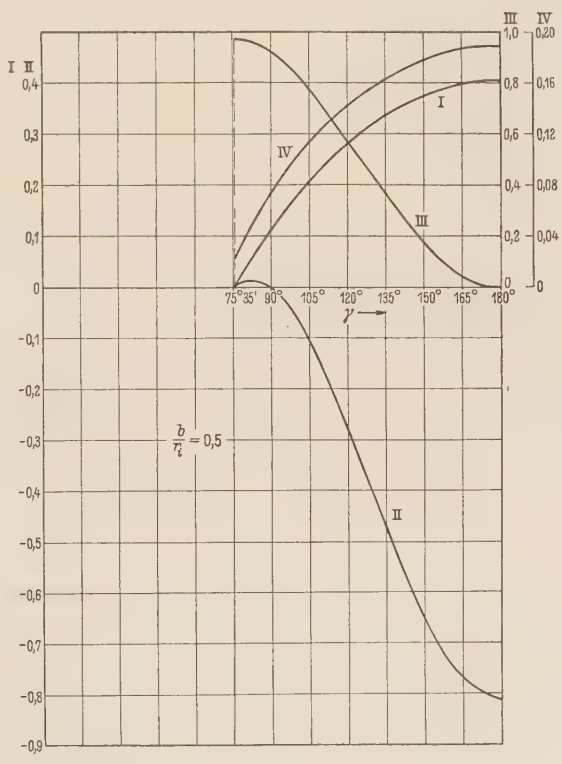


Bild 16.

welche den logarithmischen Faktor des gesamten logarithmischen Gliedes darstellt, (II) die Funktion

$$\frac{r_i}{b} \cos \gamma \cdot \ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2} - 2 \frac{b}{r_i} \cos \gamma},$$

also den zur Differenz $l_a - l_i$ als Faktor hinzutretenden logarithmischen Faktor, (III) die Funktion

$$\frac{r_i}{b} \sin \gamma \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{r_i \sin \gamma} - \operatorname{ctg} \gamma \right)^2}} - \gamma + \frac{\pi}{2} \right)$$

d. h. den zur Differenz $l_a - l_i$ als Faktor hinzutretenden die arcus-Funktion enthaltenden Betrag und schließlich (IV) die Funktion

$$\frac{r_i}{b} \cos \gamma \cdot \ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_i^2} - 2 \frac{b}{r_i} \cos \gamma} + 1 - \frac{r_i}{b} \sin \gamma \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{r_i \sin \gamma} - \operatorname{ctg} \gamma \right)^2}} - \gamma + \frac{\pi}{2} \right),$$

welche den gesamten zur Differenz $l_a - l_i$ hinzutretenden Faktor darstellt und die somit den Fluß durch das Dreieck bestimmt, welches nach Abzug des von l_i und einer der angrenzenden Trapezseiten bestimmten Parallelogramms vom Trapez verbleibt.

c) Gegeben: l_i, l_a, r_i, r_a und b

Wir wollen nunmehr in den oben unter a) abgeleiteten Gleichungen die Variable γ durch die Variable b ersetzen. Aus der Gl. (26) erhalten wir

$$\cos \gamma = \frac{b^2 + r_i^2 - r_a^2}{2 b r_i} \quad (34)$$

und damit

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{2 b r_i}{b^2 + r_i^2 - r_a^2} \right)^2}, \quad (35)$$

ferner mit Gl. (34)

$$\operatorname{tg} \gamma \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1} = \pm \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2} \frac{1}{\cos^2 \gamma} - \frac{1}{\cos^2 \gamma} + 1} = \pm \sqrt{\left(\frac{r_a^2}{r_i^2} - 1 \right) \left(\frac{2 b r_i}{b^2 + r_i^2 - r_a^2} \right)^2 + 1} \quad (36)$$

und schließlich aus Gl. (34) und (35)

$$\operatorname{ctg} \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2 b r_i}{b^2 + r_i^2 - r_a^2} \right)^2 - 1}}. \quad (37)$$

Das obere (positive) Vorzeichen in Gl. (36) und (37) gilt für $b^2 + r_i^2 > r_a^2$, das untere (negative) für $b^2 + r_i^2 < r_a^2$.

Durch Einsetzen der Gl. (34), (35), (36) und (37) in Gl. (14) bzw. (21) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\mu \mu_0}{2 \pi} & \left\{ \left(l_i + \frac{l_a - l_i}{1 \pm \sqrt{\left(\frac{r_a^2}{r_i^2} - 1 \right) \left(\frac{2 b r_i}{b^2 + r_i^2 - r_a^2} \right)^2 + 1}} \right) \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i \right. \\ & - \frac{l_a - l_i}{\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2} \left[1 - \left(\frac{b^2 + r_i^2 - r_a^2}{2 b r_i} \right)^2 \right] - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{2 b r_i}{b^2 + r_i^2 - r_a^2} \right)^2 - 1}}} \left[\arccos \left(\frac{r_i}{r_a} \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + r_i^2 - r_a^2}{2 b r_i} \right)^2} \right) \right. \\ & \left. \left. - \arccos \frac{b^2 + r_i^2 - r_a^2}{2 b r_i} + \frac{\pi}{2} \right] \right\} I. \quad (38) \end{aligned}$$

Die jeweils oberen Vorzeichen gelten für $b^2 + r_i^2 > r_a^2$, die unteren für $b^2 + r_i^2 < r_a^2$.

Für den Sonderfall $r_a = r_i = r$ folgt aus der Gl. (38)

$$\Phi_{r_a=r_i=r} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} (l_a - l_i) \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2r}{b}\right)^2 - 1} \left(\arccos \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2r}\right)^2} - \arccos \frac{b}{2r} + \frac{\pi}{2} \right) \right] I. \quad (39)$$

C. Die induzierte Spannung

Wir wollen im folgenden noch kurz die Spannung betrachten, die in einer Schleife induziert wird, welche die Fläche, deren Fluß wir oben berechnet haben, umrandet und deren Leiterdurchmesser vernachlässigbar klein gegen die sonstigen Abmessungen der Schleife sowie ihren Abstand vom geraden Primärleiter ist. Die in einer solchen Schleife induzierte Spannung ergibt sich aus dem Induktionsgesetz zu

$$U = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (40)$$

wobei wir die induzierten Spannungen in der allgemeinen Form aus den Gl. (14) bzw. (21), (29) oder (38) bzw. für die Sonderfälle aus den Gl. (15), (16), (22), (23), (24), (30) bis (33) und (39) ermitteln können. Für einen sinusförmigen Strom $I = \sqrt{2} I_{eff} \sin(\omega t + \xi)$ ergibt sich somit aus Gl. (21)

$$U = - \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{\mu\mu_0 \omega}{\pi} \left\{ \left(l_i + \frac{l_a - l_i}{1 + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1}} \right) \ln \frac{r_a}{r_i} + l_a - l_i - \frac{l_a - l_i}{\sqrt{\frac{r_a^2}{r_i^2 \sin^2 \gamma} - 1} + \operatorname{ctg} \gamma} \left(\arccos \frac{r_i \sin \gamma}{r_a} - \gamma + \frac{\pi}{2} \right) \right\} I_{eff} \cos(\omega t + \xi). \quad (41)$$

Zusammenfassung

Nach der Ermittlung der allgemeinen Formel für den von einem geraden, stromdurchflossenen Leiter erzeugten magnetischen Fluß durch begrenzte Flächen wird die Formel für den Fall eines Trapezes, dessen parallele Seiten parallel zum Leiter liegen, abgeleitet. Es zeigt sich, daß sich der Fluß aus zwei Summanden ergibt, von denen der eine proportional dem Logarithmus des Verhältnisses vom äußeren zum inneren Radius ist, während der zweite eine arcus-Funktion enthält.

Für die Sonderfälle $\gamma = 180^\circ$, 90° und 0° ergeben sich erheblich vereinfachte Beziehungen. Für $\gamma = 180^\circ$ und 0° verschwindet aus den Gleichungen die arcus-Funktion. Ebenso erhält man für $l_a = l_i$ und für $r_a = r_i$ sehr einfache Beziehungen. Um die Zahlenrechnung zu erleichtern, sind eine Reihe der auftretenden Funktionen graphisch dargestellt.

Dr.-Ing. Hanns-Heinz Wolff,
The W. L. Maxson Corp., 460 West 34th St.
New York 1, N. Y.

Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen

III. Teil

Von

O. LOH, Neuss am Rhein

Mit 10 Textabbildungen

(Eingegangen am 9. Januar 1959)

Eine physikalische Erklärung für den Stromverlauf in der Nähe
des Stromnulldurchganges bei induktiven Wechselstromkreisen mit Lichtbogen

Bei den nachfolgenden Ausführungen handelt es sich um eine Fortsetzung des in Bd. 44 (1959) Heft 4 und 5 dieser Zeitschrift bereits erschienenen ersten und zweiten Teiles. „Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen“.

Übersicht. In früheren Arbeiten, die mit [I], [II], [III] und [IV]¹ bezeichnet werden, war bereits rechnerisch das Verhalten während einer Halbschwingung, mit Hilfe eines Analogrechners, unter der Voraussetzung, daß der Gesamtentladungsschlauch während des Stromnulldurchganges erhalten bleibt, bei stationären Wechselstromlichtbögen in der Umgebung des Stromnulldurchganges in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen beschrieben worden. Es wird von einer Differentialgleichung des Wechselstromkreises mit Lichtbogen ausgegangen, in der jede gemessene Lichtbogencharakteristik durch geeignete Bestimmung der Parameter eingegeben werden kann. Auch die Hysterese und die Thermik können durch Parametervariation berücksichtigt werden. Es fehlte bislang noch die physikalische Erklärung für das Verhalten des Stromes in der Umgebung des Stromnulldurchganges. Insbesondere die Frage, wann und warum bei der verwandten Differentialgleichung für einen induktiven Wechselstromkreis mit Lichtbogen ein Nachstrom auftritt der wieder auf 0 zurückgehen kann, und wodurch der zuerst nur sehr schwache Strom nach dem Stromnulldurchgang auftritt, der schließlich wieder zur nächsten Halbschwingung anschwillt, ist unbeantwortet. Eine exakte Erklärung mit Hilfe der Gleichung, die in den Analogrechner eingegeben worden war, ist aus mathematischen Gründen nicht möglich. Die in [III] durchgeführte Rechnung an einem Stromkreis mit zeitlich veränderlichem ohmschen Widerstand zeigte zwar — wie der Analogrechner — den grundsätzlichen Verlauf des Stromes. Dieser Weg ist aber nicht anschaulich genug um die Abhängigkeiten klar erkennen zu lassen. Die ebenfalls in [III] angeführte Näherungsrechnung für Stromkreise mit stromabhängigem ohmschen Widerstand läßt sich nur bis zum Stromnullpunkt durchführen, versagt aber leider beim Wiederanstieg des Stromes. Um die physikalischen Zusammenhänge besser zu erläutern, wurde im vorliegenden Fall ein zwar ungenaueres und hinsichtlich der exakten Beschreibung des Stromverlaufs nicht ganz zufriedenstellendes Verfahren angewandt, welches aber, durch geeignete Wahl der Parameter, gerade in der Umgebung des Stromnulldurchganges, relativ geringe Abweichungen vom exakten Verlauf des Stromes aufweist.

Wird in der allgemeinen Differentialgleichung eines Wechselstromkreises die Lichtbogen-spannung berücksichtigt, so ergibt sich die Gleichung:

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + e_b = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi + \psi) \quad (1)$$

mit φ = Phasenwinkel der Spannung bei Stromnulldurchgang, ψ = Phasenwinkel des Stromes im Zündaugenblick der Lichtbogen.

Als Lichtbogenspannungsgleichung wurde in [II] und [III] die Gleichung:

$$e_b = a + b l + \frac{c + d l}{i} + e \cdot i + f \frac{di}{dt} \quad (2)$$

verwandt. Die Größen a ; b ; c ; d ; e ; f sind Konstante.

Während die Durchrechnung des Stromverlaufs und auch der Lichtbogenarbeit einer Halbschwingung auf keine unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten stieß, zeigte sich die Gleichung in der Umgebung des Stromnulldurchganges einer Berechnung unzugäng-

¹ [I] LOH, O.: Die Lichtbogenarbeit beim Abschalten eines Wechselstromkreises. Arch. Elektrotechn. 41 (1954) H. 5, S. 281—300.

[II] LOH, O.: Die Länge des Lichtbogens hoher Stromstärke. Elektrotechn. u. Masch.-Bau 72 (1955) H. 20, S. 477—483.

[III] LOH, O.: Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen, I. Teil. Arch. Elektrotechn. 44 (1959) H. 4, S. 203—233.

[IV] LOH, O.: Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen, II. Teil. Arch. Elektrotechn. 44 (1959) H. 5, S. 319—329.

lich. Aus diesem Grunde wurde diese Gleichung in einen Analogrechner eingegeben und es ergaben sich unter Beachtung bestimmter Vorzeichenregeln für die Lichtbogenspannung Stromnulldurchgänge. Somit war gezeigt, daß mit Hilfe dieser Gleichungen ein induktiver Wechselstromkreis mit Lichtbogen beschrieben werden kann.

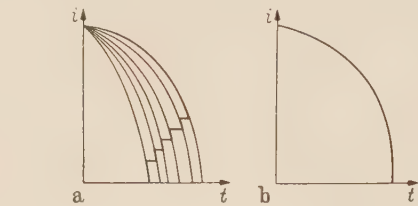
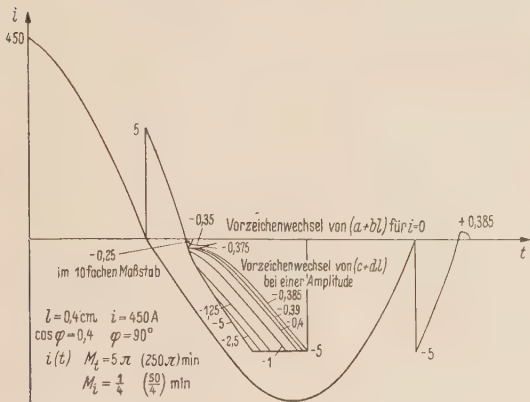


Bild 2. a Stromkurven verschieden starker Dämpfung mit den einzelnen Stromabschnitten. b Aneinandergesetzte Stromkurve.

Bild 1. Mit Hilfe einer Integrieranlage ermittelte Stromkurven mit Vorzeichenwechsel des Gliedes $\frac{c + dl}{i}$ bei verschiedenen Stromstärken.

Bild 1 zeigt eine dieser Kurven. Hierbei wurde in Abhängigkeit von dem Wechsel des Vorzeichens bei dem Glied $\frac{c + dl}{i}$ in der Lichtbogenspannungsgleichung ein mehr oder weniger starkes Abknicken des Stromes nach dem Stromnulldurchgang hervorgerufen. Bei zu frühem Vorzeichenwechsel ging der Strom wieder auf Null zurück. Eine physikalische Erklärung dieses Vorgangs ist an Hand der vorstehenden Gleichung schwer möglich. Ein Näherungsverfahren in dem durch Linearisierung der Differentialgleichung, bei dem Lichtbogenspannungsglied $\frac{c + dl}{i}$ der Strom stufenweise konstant gleich ε gesetzt wird, beschreibt den Stromverlauf bis zum Stromnulldurchgang.



Bild 3. a Induktiver Stromkreis mit veränderlichem ohmschen Widerstand. b Induktiver Stromkreis mit Lichtbogen.

Dieses in [III] angewandte Näherungsverfahren erlaubt durch stückweises Aneinandersetzen der unterschiedlich stark gedämpften Stromkurven eine gute näherungsweise Bestimmung des Stromnullpunktes. Das prinzipielle Verfahren ist aus Bild 2 ersichtlich. Die Berechnung des Stromverlaufs entsprechend diesem Näherungsverfahren ergab einen Stromnullpunkt bei $t = 4,159$ ms. Die Übereinstimmung mit dem maschinell ermittelten Nullpunkt auf Bild 1 ($t = 4,1544$ ms) ist sehr gut. Die Abweichung in der dritten Stelle hinter dem Komma ist darauf zurückzuführen, daß bei Strömen über 10 A der Einfluß des Gliedes $\frac{c + dl}{\varepsilon}$ nicht berücksichtigt wurde. Leider versagt dieses Näherungsverfahren bei der Beschreibung des Stromverlaufs nach dem Stromnulldurchgang.

Um bei der Betrachtung dieser physikalischen Zusammenhänge weiter zu kommen, wurde ein induktiver Stromkreis mit veränderlichem ohmschen Widerstand zugrunde gelegt. Die Größe dieses veränderlichen Widerstandes R_2 ergibt sich aus dem zeitlichen Verlauf des Widerstandes der Lichtbogenstrecke. Rechnerisch erfolgt dies indem die Stromgleichung eines Stromkreises mit Lichtbogen gleich der ohne Lichtbogen gesetzt und dann nach R_2 aufgelöst wird.

Im einzelnen erhält man:

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + R_2 \cdot i = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi + \psi) \quad (3)$$

Lösung:

$$i = \frac{\hat{u}}{\sqrt{L^2 \omega^2 + (R + R_2)^2}} \cdot \sin(\omega t + \psi) + i_0 \cdot e^{-\frac{R + R_2}{L} \cdot t} \quad (4)$$

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + e_b = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi + \psi) \quad (5)$$

Lösung:

$$i = \frac{\hat{u}}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \cdot \sin(\omega t + \psi) + \frac{e_b}{R} \left(e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - 1 \right) + i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad (6)$$

Durch die Gleichsetzung der beiden Lösungsgleichungen und Auflösen nach R_2 ergibt sich mit $i_0 = 0$:

$$(R + R_2)^2 = \frac{[\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi)]^2}{\left[\frac{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi)}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}} + \frac{e_b}{R} \left(e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - 1 \right) \right]^2} - (\omega L)^2$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{[\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi)]^2}{\left[\frac{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi)}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}} + \frac{e_b}{R} \left(e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - 1 \right) \right]^2} - (\omega L)^2} - R \quad (7)$$

Als Endgleichung, unter Verwendung der Abkürzungen aus [I]

$$R_2 = \sqrt{\frac{[\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi)]^2}{\left[\frac{\hat{i}}{\hat{u}} \left[\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi) + \frac{e_b}{\cos \varphi} \left(e^{-\frac{\omega t}{\tan \varphi}} - 1 \right) \right] \right]^2} - (\omega L)^2} - R \quad (8)$$

Für den Fall eines rein ohmschen Kreises ergibt sich die Gleichung:

Zahlentafel 1.

Die Lichtbogenspannung e_b in Abhängigkeit von den Stromstärkenstufen ε

ε [A]	$\frac{c + dl}{\varepsilon}$ [V]	e_b [V]
≥ 10	0	108
7,5	3	120
4	6	132
2,5	9,5	146
1,5	16	172
0,75	33	240
0,4	55	328
0,2	115	568
0,05	230	1028

$$R_2 = R \cdot \left[\frac{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi)}{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \psi) - e_b} - 1 \right] \quad (9)$$

Auf Bild 4 sind die Widerstandswerte R_2 für verschiedene Lichtbogenspannungswerte e_b über ωt bzw. t aufgetragen. Hierbei sind die gleichen Parameter wie auf Bild 1: $\hat{u} = 450 \text{ V}$; $\hat{i} = 450 \text{ A}$, $\cos \varphi = 0,4$; $\varphi = 90^\circ$; $R = 0,4 \text{ Ohm}$; $\omega L = 0,917 \text{ Ohm}$; $a = 21 \text{ V}$; $b = 15 \text{ V/cm}$; $c = 11 \text{ VA}$; $d = 30 \text{ VA/cm}$; $l = 0,4 \text{ cm}$ angenommen worden. Die Lichtbogenspannung e_b ist für verschiedene feste Stromwerte $i = \varepsilon$ abgestuft, so daß sich bei $n = 4$ Unterbrecherstellen, die in Zahlentafel 1 angeführten Werte ergaben.

$$e_b = n \left[a + b l + \frac{c + dl}{\varepsilon} \right] \quad (10)$$

Da während des weitaus größten Zeitraumes in einer Halbschwingung der Strom über 10 A ist, wurde auf Bild 5 die Widerstandskurve mit $\alpha_b = 108 \text{ V}$ für kleine Widerstandswerte R_2 noch einmal gesondert herausgezeichnet.

Auf Bild 1 schneidet der Strom die Abszisse senkrecht, weil der Widerstand des Lichtbogens entsprechend Gl. (1) und (2) mit $L' = L + f$ und $R' = R + e$ nach unendlich geht.

Wird ε (der Strom im Nenner des Gliedes $\frac{e + dl}{i}$) nicht bis auf 0 erniedrigt, so bleibt der Widerstand endlich und der Schnittwinkel mit der Abszisse geht auf etwa $86-88^\circ$ herunter [III]. Dieser letztere Fall ist der physikalisch gegebene, da das Bogenplasma durch die hohe Hitze, die es infolge seiner thermischen Trägheit während des Stromnulldurchganges behält, eine Leitfähigkeit besitzt, die den Widerstand nicht bis auf unendlich ansteigen läßt.

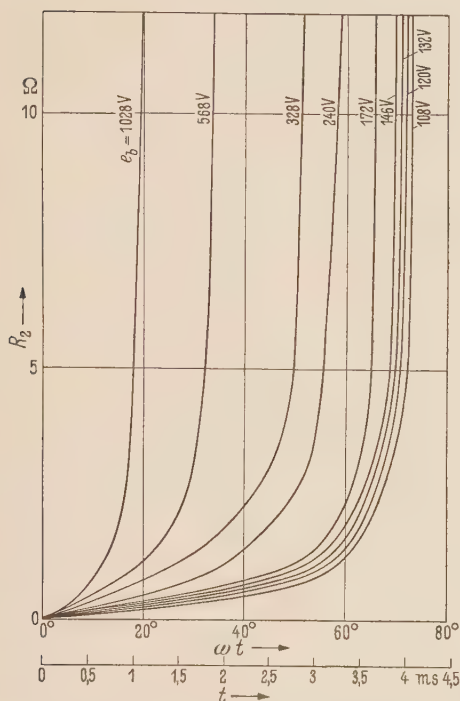


Bild 4. Der veränderliche Widerstand R_2 , entsprechend Bild 3a, in Abhängigkeit von der Lichtbogenspannung e_b , entsprechend Bild 3b, über ωt , bzw. t aufgetragen.

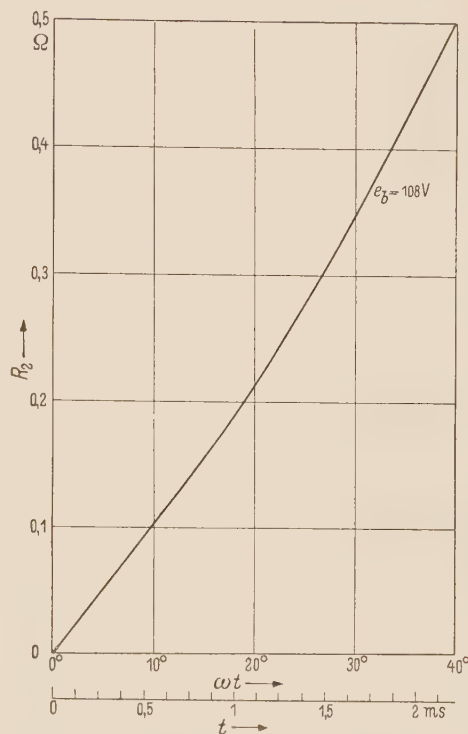


Bild 5. Der veränderliche Widerstand R_2 , entsprechend Bild 3a, in Abhängigkeit von der Lichtbogenspannung $e_b = 108$ V, entsprechend Bild 3b, über ωt , bzw. t aufgetragen.

Im vorliegenden Fall ist mit $\psi = 90^\circ$ der Stromkreis bis zum Strommaximum noch metallisch geschlossen. In diesem Augenblick zündet der Lichtbogen unmittelbar über 4 Unterbrecherstellen von jeweils $l = 0,4$ cm Länge. Infolge der im Stromkreis vorhandenen Induktivität ist der Übergang zum gedämpften Strom kontinuierlich.

Wie aus Bild 3 der Abhandlung [I] ersichtlich, ist bei einem $\cos \varphi = 0,4$ nach $t = \sim 3,75$ ms

der Wert der Funktion $K' = \frac{e^{tg\varphi} - 1}{\cos \varphi} = 1$ und weicht in den Grenzen von etwa $t = 3$ bis $t = 4,5$ ms

nicht um mehr als $\sim 10\%$ ab, so daß in erster Näherung in diesem Bereich der Ausgleichvorgang, der durch das plötzliche Hinzuschalten des Lichtbogenwiderstandes in dem Stromkreis hervorgerufen wird, vernachlässigt werden kann. Aus diesem Grunde scheint es zulässig zu sein, in dem angegebenen Bereich das grundsätzliche Verhalten des Stromes, bei veränderlichem Widerstand in diesem Wechselstromkreis, mit Hilfe stationärer Ortskurven zu untersuchen, obwohl die Ortskurvenbetrachtung, streng genommen, nur im eingeschwungenen Zustand zulässig ist. Werden die größeren Abweichungen vor dem erwähnten Bereich in Kauf genommen, so läßt sich an Hand der mittels der Ortskurventheorie ermittelten Ströme bei verschiedenen großen R_2 , in Verbindung mit den Bildern 4 und 5, der prinzipielle Stromverlauf bis zum Stromnulldurchgang ermitteln. Der Abfall des Stromes wird bei dieser Darstellung steiler und der Stromnulldurchgang erfolgt zu früh wegen der Außerachtlassung des Einschwingvorganges.

Von folgender allgemeinen Schaltung sei ausgegangen:
 L ist die Stromkreisinduktivität, R_1 der ohmsche Widerstand des Stromkreises. Mit R_2 wird ein veränderlicher Widerstand des Lichtbogens bezeichnet und C_3 ist die Kapazität parallel zur Schaltstrecke mit dem Verlustwiderstand R_3 . Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung sei sinusförmig.

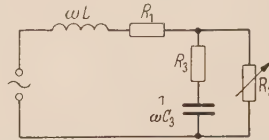


Bild 6. Wechselstromkreis mit veränderlichem Widerstand R_2 unter Berücksichtigung der Kreiskapazitäten.

Der Widerstand der Parallelschaltung errechnet sich aus:

$$Z_{23} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{\left(R_3 - j \cdot \frac{1}{C_3}\right) \cdot R_2}{\left(R_3 - j \cdot \frac{1}{C_3}\right) + R_2}. \quad (11)$$

Der Gesamtwiderstand zu:

$$Z = R_1 + j \cdot \omega \cdot L + \frac{\left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right) \cdot R_2}{\left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right) + R_2} = \frac{(R_1 + j \cdot \omega \cdot L) \left[\left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right) + R_2\right] + \left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right) R_2}{\left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right) + R_2} \quad (12)$$

Unter Verwendung der allgemeinen Kreisgleichung [1] ergibt sich:

$$I' = S = \frac{A + B \cdot R_2}{C + D \cdot R_2} \quad (13)$$

mit:

$$A = U \left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right); \quad B = U; \quad C = (R_1 + j \cdot \omega L) \cdot \left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right);$$

$$D = (R_1 + j \cdot \omega L) + \left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right).$$

Somit ergibt sich:

$$I_k = S_{R_2=0} = \frac{A}{C} = \frac{U}{R_1 + j \omega L} \quad (14)$$

$$I_0 = S_{R_2=\infty} = \frac{B}{D} = \frac{U}{(R_1 + j \omega L) + \left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right)} \quad (15)$$

$$I_1 = S_{R_2=1} = \frac{A + B}{C + D} = \frac{U \left[R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3} + 1\right]}{(R_1 + j \cdot \omega L) \cdot \left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right) + (R_1 + j \omega L) + \left(R_3 - j \cdot \frac{1}{\omega C_3}\right)}. \quad (16)$$

Der Strahl zum Kreismittelpunkt S_M errechnet sich aus:

$$S_M = \frac{A \cdot D_K - B \cdot C_K}{C \cdot D_K - D \cdot C_K} \quad (17)$$

und der Betrag des Halbmessers aus:

$$K = \frac{B \cdot C - A \cdot D}{C \cdot D_K - D \cdot C_K}. \quad (18)$$

(Der Index K deutet konjugiert komplexe Größen an.)

Mit den drei Strömen I_K ; I_0 und I_1 läßt sich die Ortskurve als Kreis aufzeichnen. Die weiteren Ströme $I_2 \dots$ ergeben sich dann durch Errichten einer beliebigen Senkrechten auf dem Durchmesser, der durch I_0 geht, und weiteres Auftragen der Abstandsstrecke auf dieser Senkrechten, die durch die Schnittpunkte der Verbindungslinie zwischen $I_0 - I_K$ und $I_0 - I_1$ gegeben ist (s. Bild 7).

Wächst die Größe A so vergrößert sich der Durchmesser des Kreises, da I_0 unverändert bleibt und nur die Ströme I_k ; I_1 weiter vom Nullpunkt fortwandern. Wächst U , so wächst B wie auch A und somit die Entfernung aller drei Ströme vom Nullpunkt.

Der Widerstand $\left(R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}\right)$ ist Faktor bei A und C und Summand bei D .

Der Kurzschlußstrom I_k ist unabhängig gegen Änderungen von $\left(R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}\right)$. Der Nullstrom I_0 ändert sich umgekehrt proportional zu $\left(R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}\right)$. Der Strom I_1 ändert sich in einer komplizierten Weise mit $\left(R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}\right)$.

Durch die Größe des Widerstandes $\left(R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}\right)$ werden somit die Lage und die Größe des Kreises verändert.

Durch Veränderung der Widerstände $(R_1 + j \omega L)$ werden die Größen C ; D und somit auch die drei betrachteten Ströme verändert.

Nachfolgend ein Beispiel mit den Größen wie diese bei Versuchen vorlagen:

$$R_1 = 0,4 \, \Omega; \omega L = 0,917 \, \Omega; R_2 = \text{variabel}; \frac{1}{\omega C_3} = 3,185 \cdot 10^7 \, \Omega \quad (C_3 = 10^{-10} \, \text{F})$$

$$R_3 = 0,1 \, \Omega; U = 450 \, \text{V}$$

$$I_k = S_{R_2=0} = 180 - j \cdot 413$$

$$I_0 = S_{R_2=\infty} = \frac{450 (0,5 + j \cdot 3,185 \cdot 10^7)}{(0,25 + 10,15 \cdot 10^{14})} = 22,6 \cdot 10^{-14} + j \cdot 142 \cdot 10^{-7} \cong 0$$

$$I_1 = S_{R_2=1} = \frac{450 (1,1 - j \cdot 3,185 \cdot 10^7)}{(0,4 + j \cdot 0,917) (0,1 - j \cdot 3,185 \cdot 10^7) + (0,5 - j \cdot 3,185 \cdot 10^7)} = 228,5 - j \cdot 149,5.$$

Die in diesem Beispiel vorliegende Größenordnung des Widerstandes $\left(R_3 + j \frac{1}{\omega C_3}\right)$ ist in der Praxis bei Schaltgeräten selten kleiner. Daher ist auch der Einfluß dieses Gliedes auf den Stromverlauf außerordentlich gering, wie eine Durchrechnung des vereinfachten Stromkreises ohne $\left(R_3 + j \frac{1}{\omega C_3}\right)$ zeigt (s. Bild 8).

Der Gesamtwiderstand ergibt sich zu:

$$Z = (R_1 + j \omega L) + R_2. \quad (19)$$

Der Strom errechnet sich aus:

$$I = S = \frac{U}{(R_1 + j \omega L) + R_2} = \frac{A + B \cdot R_2}{C + D \cdot R_2} \quad (20)$$

mit

$$A = U; \quad B = 0; \quad C = R_1 + j \omega L; \quad D = 1$$

$$I_k = S_{R_2=0} = \frac{U}{R_1 + j \omega L}, \quad (21)$$

$$I_0 = S_{R_2=\infty} = 0, \quad (22)$$

$$I_1 = S_{R_2=1} = \frac{U}{R_1 + j \omega L + 1}, \quad (23)$$

$$S_M = \frac{A \cdot D_k - B \cdot C_k}{C \cdot D_k - D \cdot C_k} = \frac{U}{Z j \omega L}, \quad (24)$$

$$K = \frac{B \cdot C - D \cdot A}{C \cdot D_k - D \cdot C_k} = - \frac{U}{Z j \omega L}, \quad (25)$$

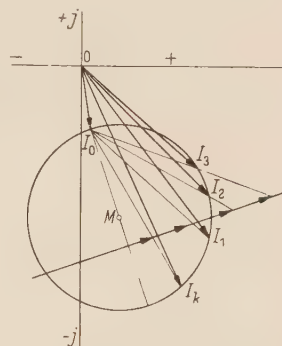


Bild 7. Die graphische Ermittlung der Ströme.

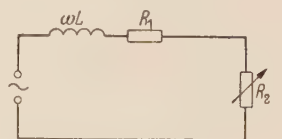


Bild 8. Induktiver Stromkreis mit veränderlichem ohmschen Widerstand.

mit den gleichen Daten wie oben:

$R_1 = 0,4 \, \Omega$; $\omega L = 0,917 \, \Omega$; $\hat{u} = 450 \, \text{V}$; $R_2 = \text{veränderlich}$
errechnet sich:

$$I_h = S_{R_2=0} = \frac{450}{(0,4 + j \cdot 0,917)} = 180 - j \cdot 413$$

$$I_1 = S_{R_2=1} = \frac{450 (1,4 - j \cdot 0,917)}{(1,4 + j \cdot 0,917) (1,4 - j \cdot 0,917)} = 225 - j \cdot 147,5$$

$$S_M = -K = \frac{450}{j \cdot 1,834} = -245,5 j = 245,5 \cdot e^{-j90^\circ}.$$

Ein Vergleich dieser Werte mit den Ergebnissen auf Grund des vollständigen Schaltbildes zeigt vernachlässigbar kleine Abweichungen. Auf Bild 9 ist oben die Ortskurve des Stromes für das vereinfachte Schaltbild bei $\hat{u} = 450 \, \text{V}$ aufgetragen. Unten links sind die Stromwerte in

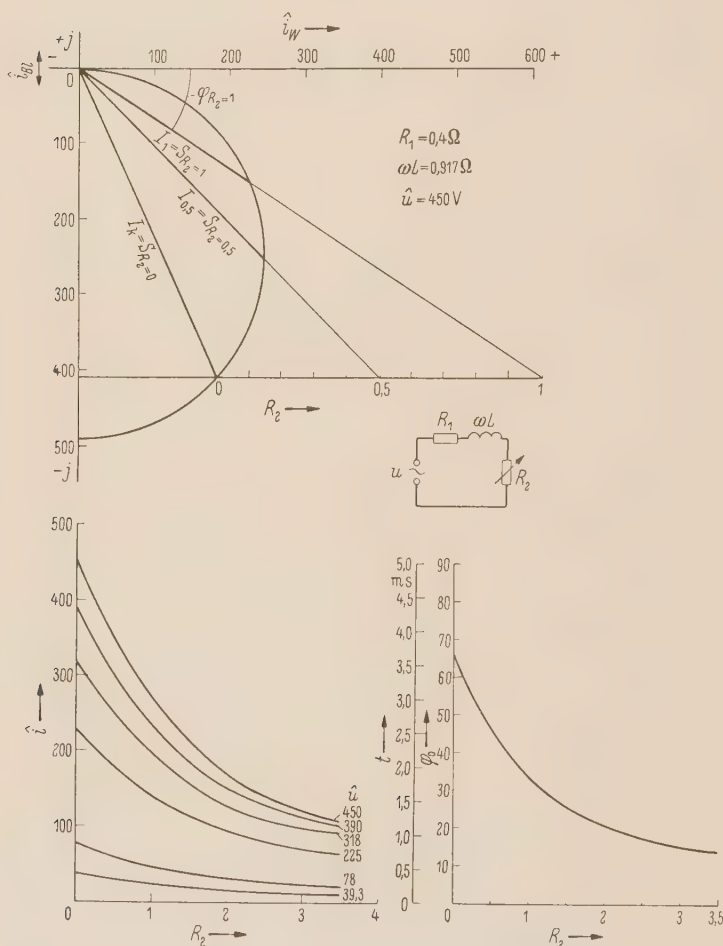


Bild 9. Oberes Bild: Ortskurve des Stromes für das vereinfachte Schaltbild (Bild 8) bei $\hat{u} = 450 \, \text{V}$; $\omega L = 0,917 \, \Omega$; $R_1 = 0,4 \, \Omega$.
Unteres Bild, links: Die Stromwerte in Abhängigkeit von R_2 bei $\hat{u} = 450; 390 \, \text{V}; 318 \, \text{V}; 225 \, \text{V}; 78 \, \text{V}; 39,3 \, \text{V}$.
Unteres Bild, rechts: Der Phasenwinkel φ in Abhängigkeit von R_2 .

Stromnulldurchgang $t = 4,154 \, \text{ms}$ nach der Zündung der Lichtbögen. Bereits oben wurde erwähnt, daß der verfrühte Stromnulldurchgang (Abweichung 25%) durch die Außerachtlassung des Ausgleichvorganges erfolgt. Diese Abweichung beträgt aber in der Umgebung des Stromnulldurchganges ($3 \, \text{ms} < t < 4,5 \, \text{ms}$ nach Einsetzen des Lichtbogens) nur noch $\sim 10\%$, so daß eine prinzipielle Betrachtung des Stromverlaufs vor und nach dem Stromnulldurchgang durchaus möglich ist.

in Abhängigkeit von R_2 bei $\hat{u} = 450 \, \text{V}; 390 \, \text{V}; 318 \, \text{V}; 225 \, \text{V}; 78 \, \text{V}; 39,3 \, \text{V}$ und unten rechts der Winkel φ in Abhängigkeit von R_2 aufgetragen. Diese Werte wurden mittels der Ortskurve ermittelt.

An Hand der Kurven in Bild 9 unten links kann jede Funktion $R_2 = f_2(i)$ oder $R_2 = f_3(i(t))$, unter gleichzeitiger Beachtung der Phasenverschiebung des Stromnulldurchganges entsprechend der Kurve auf Bild 9 unten rechts, dargestellt werden.

Auf Bild 10 sind Stromkurven bei unterschiedlichen Widerständen R_2 aufgetragen. An Hand der Widerstandskurven auf Bild 4 und Bild 5 läßt sich im vorliegenden Fall der Verlauf des Stromes bis zum Stromnullpunkt einzeichnen. Die Lichtbögen setzen im Augenblick $t = 3,68 \, \text{ms}$ ($\cos \varphi = 0,4$) ein. Infolge der laufend zunehmenden Dämpfung erfolgt der Stromnulldurchgang bei $t = 6,8 \, \text{ms}$, also $t = 3,12 \, \text{ms}$ nach der Zündung der Lichtbögen.

Wie aus Bild 1 ersichtlich, erfolgt, bei Berechnung mit Hilfe des Analogrechners, der

Wird ein Absinken des Widerstandes der Bogensäule nach dem Stromnulldurchgang mit der gleichen Geschwindigkeit wie beim Ansteigen vor dem Stromnulldurchgang angenommen, so ergibt sich ganz kurz nach dem Stromnulldurchgang ein Zurücklaufen des Stromes auf 0. Verlangsamt sich der Abfall des Widerstandes, so daß sich die Zeitzwischenräume zwischen den betrachteten Widerstandswerten bei der Widerstandszunahme um das 1,05fache bei der Widerstandsabnahme vergrößern, so ergibt sich die auf Bild 8 eingezeichnete Kurve A, d. h. auch hierbei geht der Stromfluß, nachdem er bereits in der neuen Richtung floß, wieder

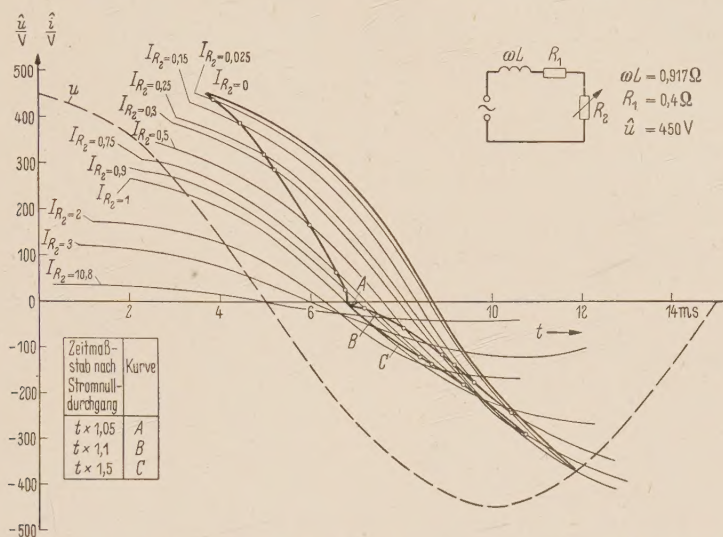


Bild 10. Mit Hilfe der Ortskurven ermittelte Stromkurven bei unterschiedlichen Widerständen R_2 .

auf Null zurück. Bei Erhöhung der Zeitzwischenräume auf den 1,1fachen Betrag ergibt sich die Kurve B und bei Erhöhung auf den 1,5fachen Betrag die Kurve C. Verglichen mit Bild 1 entspricht die Kurve A etwa einer Änderung des Vorzeichens von dem Glied $\frac{c + dI}{i}$ bei $-0,35 A$, die Kurve B etwa einem Vorzeichenwechsel bei $-0,4 A$ und die Kurve C einem solchen bei $-1,25 A$.

Beschreibung des Stromverlaufes in Abhängigkeit von R_2

Nach Einsetzen des Lichtbogens im Augenblick des Strommaximums wächst der Widerstand der Gasentladungsstrecke bis zum Erreichen des Stromnullwertes an. Im Augenblick des Stromnulldurchganges hat die Gasentladungsstrecke aber noch einen endlichen Widerstand. Nach Umkehr der anliegenden Spannung (unter Berücksichtigung der dann bestehenden Phasenschiebung zwischen Strom und Spannung) werden die Ladungsträger der Gasentladungsstrecke zur positiven bzw. negativen Elektrode hingezogen. Ist die Beweglichkeit der Ladungsträger so groß, daß alle oder der überwiegende Teil in dieser Zeit an den Elektroden neutralisiert werden, und ist die Zahl der, durch den unmittelbar anschließend einsetzenden Stromfluß von der neuen Kathode zur neuen Anode, entstehenden Ladungsträger zu gering, so wird das Bogenplasma durch diese zunehmende Verarmung an Ladungsträgern immer weniger leitfähig und reißt schließlich auseinander. Nunmehr kann der weitere Stromfluß nur durch eine Wiederrzündung erfolgen, die aber als solche nichts mit dem Lichtbogenstrom vorher zu tun hat. Ohne Wiederrzündung ist der Stromkreis nach einem gewissen Nachstrom unterbrochen. Ist die Beweglichkeit der Ladungsträger aber so klein, daß nur ein gewisser Teil neutralisiert wird, so bleibt die Leitfähigkeit der Gasentladungsstrecke, entsprechend verkleinert, erhalten und steigt anschließend durch den zunehmenden Transport von Ladungsträgern mit wachsender Ionisation wieder an. Da eine große Beweglichkeit identisch ist mit einem kleinen Widerstand der Gasentladungsstrecke wird es somit verständlich, daß bei zu schnellem Absinken des Widerstandes R_2 unmittelbar nach dem Stromnulldurchgang der Strom auf Null zurückgeht. Der Ersatzwiderstand R_2 für die Gasentladungs-

strecke ist also eine Größe, die unmittelbar nach dem Stromnulldurchgang im wesentlichen aus zwei gegenläufigen Vorgängen bestimmt wird, der Entionisierung durch das Absaugen der Ladungsträger an die Elektroden und die Ionisation durch den neuen Stromfluß zwischen den Elektroden.

Nach HOCHRAINER [2] ist der „Restwiderstand“ der Gasentladungsstrecke ein direktes Maß für den Zustand der Lichtbogenstrecke unmittelbar nach dem Stromnulldurchgang. Bei zu großer Leitfähigkeit, d. h. zu geringem „Restwiderstand“ geht der Strom über einen Entionisierungsstrom der Lichtbogenstrecke, der als Nachstrom sichtbar wird, wieder auf 0 zurück. Bleibt die Widerstandsverkleinerung von R_2 hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit unter einer bestimmten Grenze, so läuft der Strom nicht mehr auf 0 zurück, sondern steigt, nachdem er mehr oder weniger stark zur Abszisse abgebogen wurde, und dabei zeitweilig sogar annähernd parallel zur Abszisse verlaufen kann, allmählich wieder an. Je langsamer der Widerstand unmittelbar nach dem Stromnulldurchgang absinkt, desto steiler ist der Wiederanstieg der Stromkurve. Das Strommaximum, in dieser nach dem Stromnulldurchgang beginnenden Halbschwingung, ist selbstverständlich um so höher, je tiefer der Widerstand R_2 , bis ungefähr zum Maximum der Halbschwingung, abgesunken ist.

Zusammenfassung

Der Stromverlauf nach dem Stromnulldurchgang bei Wechselstromkreisen mit Lichtbogen, der in Übereinstimmung mit Versuchen bereits früher [III] mit Hilfe eines Analogrechners ermittelt worden war (Bild 1), wurde so beschrieben, daß hinsichtlich seines Verhaltens unmittelbar nach dem Stromnulldurchgang eine physikalische Erklärung möglich ist (Bild 8).

Unter Verzicht auf maßstäbliche Genauigkeit wurde der Stromverlauf mit Hilfe der Ortskurvendarstellung, bei vor dem Stromnulldurchgang größer werdendem und nach dem Stromnulldurchgang kleiner werdendem Widerstand R_2 , zeichnerisch ermittelt. Bis zum Stromnulldurchgang zeigten sich zu erwartende Abweichungen von dem mittels Analogrechner, wie auch mit Hilfe eines anderen Näherungsverfahrens [III] ermittelten Stromverlauf. Wie aber an Hand der Näherungsrechnung gezeigt wurde, sind, gerade in der Umgebung des Stromnulldurchganges, die Verzerrungen durch die Nichtbeachtung des Einschwingvorganges, im vorliegenden Fall bei $\cos \varphi = 0,4$ mit $\psi = 90^\circ$ Zündwinkel der Lichtbögen, minimal, so daß eine prinzipielle Beschreibung des Stromverlaufs in der Umgebung des Stromnulldurchganges durchaus möglich ist. Der Rücklauf des Stromes auf 0 bei zu schnellem Abfall des Widerstandes nach dem Stromnulldurchgang konnte an Hand des sogenannten „Restwiderstandes“ der Lichtbogenstrecke erklärt werden. Erst wenn die Widerstandsabfallgeschwindigkeit unmittelbar nach dem Stromnulldurchgang einen gewissen Grenzwert nicht überschreitet, steigt der Strom zu einer weiteren Halbschwingung an. Die Geschwindigkeit des Stromanstieges ist abhängig von der Geschwindigkeit der Widerstandsänderung.

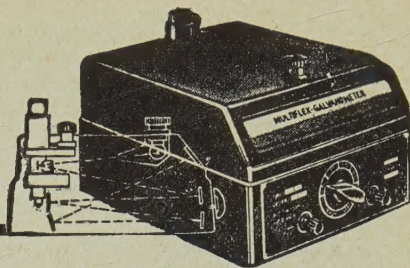
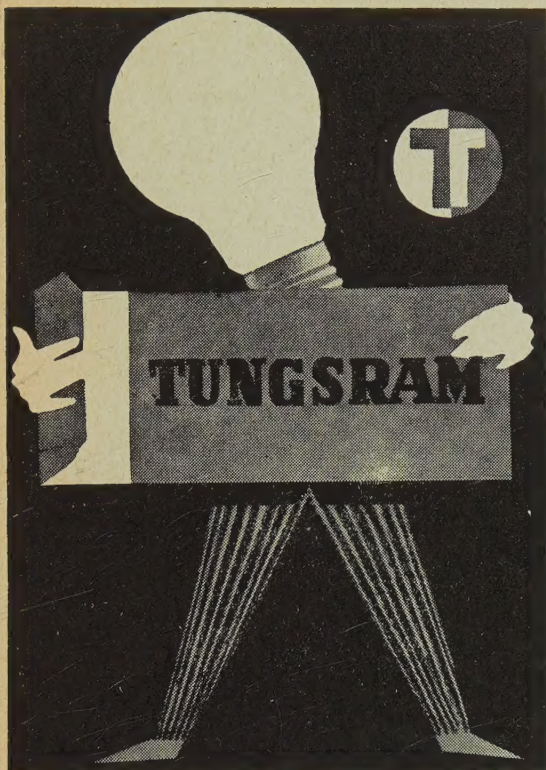
Alle bisher beobachteten Erscheinungen hinsichtlich des Stromes beim Stromnulldurchgang in Wechselstromkreisen mit Lichtbogen können durch den in [I], [II], [III], [IV] und in vorliegender Abhandlung entwickelten Kalkül beschrieben werden ohne daß eine Wiederezündung nach dem Stromnulldurchgang angenommen werden muß. Die im Stromkreis stets vorhandenen Kapazitäten stehen mit diesem Mechanismus nicht in unmittelbarem Zusammenhang sondern verursachen nur zusätzliche Störschwingungen und Ausgleichvorgänge die sich dem Grundvorgang überlagern und bei der prinzipiellen Betrachtung in fast allen Fällen der Niederspannungsnetze außer Acht gelassen werden können. Dies gilt auch für Hochspannungsnetze soweit der Gasentladungsschlauch nicht durch Blasung beim Stromnulldurchgang zerrissen wird.

Abschließend sei der Firma Klöckner-Moeller in Bonn gedankt, mit deren Unterstützung die hier und in den vorhergehenden Veröffentlichungen durchgeführten Messungen und Berechnungen durchgeführt wurden.

Literatur

[1] BECKER, A., u. H. VOIGT: Mathem. Hilfsbuch für Wechselstromtechnik; Leipzig. — [2] HOCHRAINER, A.: ETZ-A 73 (1952) H. 19, S. 627—629.

Dr. OTTO LOH, Neuss a. Rh., Oberstr. 126.



Multiflex - Galvanometer

Empfindlich wie ein Spiegelgalvanometer — ab $5 \cdot 10^{-11}$ A —. Einfach im Gebrauch wie ein Zeigerinstrument. Verschiedene Systeme von 20-6000 Ohm. Austauschbare Lichtzeigerskalen mit parallaxenfreier Ablesung. Skalenbeleuchtung umschaltbar für Netz- und Batterieanschluß. **Zusatzgeräte:** Photographische Registriereinrichtung. Photoelektrischer Nachlaufschreiber. Photoelektrische Schaltkontakte.

Verlangen Sie unsere neue Liste 18/AE



DR. BRUNO LANGE

Spezialfabrik lichtelektr. Zellen
und Apparate

BERLIN-ZEHLENDORF

Hermannstraße 14-18

Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik

Dr. phil. HEINRICH KADEN

Oberingenieur und wissenschaftlicher Mitarbeiter im Zentral-Laboratorium
der Siemens & Halske Aktiengesellschaft, apl. Professor an der Technischen Hochschule München

Zweite, vollkommen umgearbeitete Auflage von:

Die elektromagnetische Schirmung in der Fernmelde- und Hochfrequenztechnik

(Technische Physik in Einzeldarstellungen

Herausgegeben von W. Meissner. Band 10)

Mit 195 Abbildungen. XV, 354 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 66,—

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
J.F. BERGMANN · MÜNCHEN

Allgemeine Wechselstromlehre

Von Prof. Dr.-Ing. H. F. SCHWENKHAGEN, Technische Akademie Bergisch Land, Wuppertal

Vor kurzem erschien:

Zweiter Band: Vierpole, Leitungen, Wellen

Mit 335 Abbildungen. XII, 441 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 39,—

Inhaltsübersicht: Vierpoltheorie · Die lange Leitung im stationären Zustand · Die Vierpolkette · Schaltvorgänge auf Leitungen, Wanderwellen · Wellenausbreitung im Raum · Verzeichnis der benutzten Formelzeichen · Sachverzeichnis.

Früher erschien:

Erster Band: Grundlagen

Mit 420 Abbildungen. XI, 544 Seiten Gr.-8°. 1951. Ganzleinen DM 39,—

Lehrbuch der Hochspannungstechnik

Von Dr.-Ing. GUNTRAM LESCH, o. Professor an der Technischen Hochschule Fridericiana Karlsruhe

Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Dr.-Ing. E. BAUMANN, Oberingenieur am Hochspannungsinstitut und Lehrstuhl für Elektrotechnik der Technischen Hochschule Fridericiana Karlsruhe

Mit 542 Abbildungen. XII, 444 Seiten Gr.-8°. 1959.

Ganzleinen DM 39,60

Inhaltsübersicht: Einleitung: Bedeutung und Arbeitsgebiete der Hochspannungstechnik · Grundlagen: Das elektrostatische Feld. Berechnung des Feldes einfacher Elektrodenanordnungen. Anwendungen und Ergänzungen. Hochspannungserzeugung, insbesondere im Laboratorium und im Prüffeld · Dielektrische Festigkeit: Entladungsvorgänge. Gasentladungen. Durchbruch, Lichtbogen. Blitz, Überschlag. Feste und flüssige Dielektriken. Die festen und flüssigen Isolierstoffe der Technik. Konstruktionen · Netzvorgänge und Spannungsbeanspruchung: Übersicht über die im Betrieb bestehenden Spannungsbeanspruchungen, Überspannung und Ausbreitung. Erregung von erzwungenen Schwingungen und Ausgleichsvorgängen. Zusammenstellung der tatsächlichen Beanspruchungen · Anhang · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG